

MICHAŁ RADZIK*

BEZPOŚREDNIE WYZNACZANIE STANU USTALONEGO W MASZYNACH SYNCHRONICZNYCH W PRZYPADKU OKRESOWEJ ZMIENNOŚCI MOMENTU MECHANICZNEGO

DIRECT DETERMINATION OF THE STEADY STATE IN SYNCHRONOUS MACHINES FOR PERIODIC VARIABILITY OF MECHANICAL TORQUE

Streszczenie

W artykule przedstawiono algorytm wykorzystujący metodę bilansu harmonicznych do znajdowania rozwiązania stanu ustalonego w maszynie synchronicznej pobudzonej momentem mechanicznym z okresową składową przemienną zależną od kąta obrotu wirnika. Problem jest skomplikowany, gdyż obecność składnika okresowego prowadzi do zagadnień nieliniowych. Opisana procedura pozwala na bezpośrednie wyznaczenie widm Fouriera najważniejszych wielkości opisujących maszynę synchroniczną. Przykładowe obliczenia wykonano dla silnika synchronicznego pracującego w stanie ustalonego synchronizmu i obciążonego momentem mechanicznym okresowo zmiennym o zadanym przebiegu.

Słowa kluczowe: stan ustalony, maszyna synchroniczna, widmo Fouriera

Abstract

This paper presents an algorithm that uses the harmonic balance method for finding the steady-state solution in the moment of excited synchronous machine with periodic mechanical component of the alternating depending on the angle of rotation of the rotor. The problem is complicated because the presence of periodic component leads to problems of nonlinear. This procedure allows the direct determination of the Fourier spectra of the most important volumes describing the synchronous machine. Sample calculations were performed for a synchronous motor operating in the state of synchronism and fixed mechanical load torque varying periodically at a specified course.

Keywords: steady state, synchronous machine, Fourier spectrum

* Dr inż. Michał Radzik, Zespół Placówek Kształcenia Zawodowego, Nowy Sącz.

1. Wstęp

Specyfika budowy maszyn synchronicznych sprawia, że są one wykorzystywane w roli prądnic lub silników. Przy pracy prądnicowej jako układy napędowe stosuje się m.in. silniki spalinowe [1]. Z kolei w roli silnika maszyna synchroniczna może być wykorzystana np.: do napędu dużych kompresorów tłokowych [2]. W takich sytuacjach mogą pojawić się kołysania (oscylacje) wymuszone maszyn synchronicznych [3]. Są one spowodowane tym, że moment napędowy generatora synchronicznego albo moment obciążenia silnika synchronicznego są periodycznie zmienne. Przyczyną pulsowania momentu mechanicznego jest głównie pulsujący charakter siły działającej na tłoki cylindrów, a wynikającej ze zmiennego ciśnienia medium (spalin) w cylindrach. Oscylacje momentu mechanicznego, które zależą od kąta obrotu wału maszyny tłokowej φ , powodują wahania prędkości o charakterze pulsacyjnym, co w konsekwencji prowadzi do wahań kąta mocy (kąta obciążenia) δ [4]. Zmieniająca się w czasie wielkość kąta δ pociąga za sobą zmiany amplitud prądów w poszczególnych uzwojeniach maszyny synchronicznej.

Oddziaływanie kąta obrotu i prędkości kątowej wirnika na prądy i strumienie skojarzone w maszynie wymusza, w celu wyznaczenia stanu ustalonego, konieczność rozwiązywania równania mechanicznego łącznie z równaniami obwodów elektrycznych. W konsekwencji otrzymuje się układ co najmniej sześciu równań różniczkowych charakteryzujących się nieliniowością strukturalną, której głównym powodem jest wyrażenie na moment elektromagnetyczny występujące w równaniu mechanicznym, które zależy od prądów maszyny [5]. Wyznaczenie w takim przypadku rozwiązania analitycznego nie jest możliwe, gdyż nie opracowano dotychczas ogólnej metody rozwiązywania nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych. Wyjściem z sytuacji jest zastosowanie metod numerycznych pozwalających na znalezienie rozwiązania przybliżonego. Najbardziej popularna z nich sprowadza się do całkowania równań dynamiki maszyny przy zadanych warunkach początkowych. Rozwiązanie ustalone uzyskuje się każdorazowo po odpowiednio długim czasie całkowania przekraczającym czas trwania stanu nieustalonego, wywołanego pojawieniem się składowej okresowej. Poza tym takie podejście nie pozwala wnikać w istotne właściwości przebiegów okresowych. Możliwość taką daje zastosowanie opisanego w pracy [6] algorytmu iteracyjnego. Wykorzystuje on metodę bilansu harmonicznych do precyzyjnego i jednoznacznego określania poszczególnych harmonicznych w przebiegach zmiennych stanu maszyny.

Koncepcja zastosowania prezentowanego algorytmu została pokazana na przykładowych obliczeniach symulacyjnych przeprowadzonych dla silnika synchronicznego jawnobiegowego pracującego synchronicznie i obciążonego momentem mechanicznym z okresową składową przemienną będącą funkcją kąta obrotu wirnika. Wybrano typowe warunki pracy odpowiadające zasilaniu uzwojeń stojana z trójfazowej sieci sztywnej, a uzwojenia wzbudzenia z sieci napięcia stałego. Ponadto założono liniowość obwodu magnetycznego maszyny oraz konstrukcję silnika czyniącą zasadnym użycie opisu obwodowego przy dwuosiowej reprezentacji obwodów tłumiących wirnika. Wobec powyższych ograniczeń metoda bilansu harmonicznych może być zastosowana, gdyż istnieje punkt równowagi statycznej układu, odpowiadający momentowi średniemu.

2. Dostosowanie równań opisujących maszynę synchroniczną do metody bilansu harmonicznego

Rozwiązywanie równań maszyny synchronicznej zapisanych we współrzędnych naturalnych sprawia duże trudności ze względu na zależność indukcyjności własnych i wzajemnych maszyny od kąta obrotu wirnika. Istotne ułatwienie obliczeń uzyskuje się przez zapisanie równań w innym układzie współrzędnych. W zależności od postawionego problemu można skorzystać z zamieszczonych w pracy [7] gotowych macierzy transformacji dla układów trójfazowych. Z analizy przeprowadzonej w pracy [8] wynika, iż stosując metodę bilansu harmonicznego, wygodnie jest posługiwać się zespolonymi szeregami Fouriera. W związku z tym zdecydowano się na sprowadzenie równań maszyny synchronicznej do układu współrzędnych wirujących $(0, +, -)$.

Prądy i napięcia faz stojana po transformacji do wybranego układu współrzędnych mają postać:

$$\begin{bmatrix} i^0(t) \\ i^+(t) \\ i^-(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\Omega_s t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\Omega_s t} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ i_c(t) \end{bmatrix}; \quad a = e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (1a)$$

$$\begin{bmatrix} u^0(t) \\ u^+(t) \\ u^-(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\Omega_s t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\Omega_s t} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a(t) \\ u_b(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} \quad (1b)$$

Kąt obrotu na płaszczyźnie zespolonej dobrano tak, aby napięcia

$$\begin{bmatrix} u_a(t) \\ u_b(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} = \sqrt{2}U \begin{bmatrix} \cos(\Omega_s t) \\ \cos(\Omega_s t - 120^\circ) \\ \cos(\Omega_s t - 240^\circ) \end{bmatrix} \quad (2)$$

w nowym układzie współrzędnych miały wartości stałe.

$$\begin{bmatrix} u^0 \\ u^+ \\ u^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}}U \\ \sqrt{\frac{3}{2}}U \end{bmatrix} \quad (3)$$

Równania maszyny synchronicznej sprowadzone do układu współrzędnych wirujących przyjmują postać (4a). Świadomie pominięto w nich zależność dla składowej zerowej, gdyż równanie to ma zerowe rozwiązanie i dodatkowo prąd $i^0(t)$ nie występuje w żadnym z pozostałych równań. Komplet równań dynamiki maszyny synchronicznej uzyskuje się dopiero po uzupełnieniu zależności (4a) równaniem mechanicznym (4b).

$$\begin{bmatrix} u^+ \\ u^- \\ u'_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s i^+ \\ R_s i^- \\ R'_f i'_f \\ R'_D i'_D \\ R'_Q i'_Q \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \\ \psi'_f \\ \psi'_D \\ \psi'_Q \end{bmatrix} + j\Omega_s \begin{bmatrix} \psi^+ \\ -\psi^- \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4a)$$

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + D \frac{d\varphi}{dt} = T_{em} + T_m(\varphi); \quad T_{em} = jp(i^- \psi^+ - i^+ \psi^-) \quad (4b)$$

Poszukiwanymi wielkościami w układzie równań (4a, b) są prądy $i^+(t)$, $i^-(t)$, $i'_f(t)$, $i'_D(t)$, $i'_Q(t)$ oraz kąt obrotu wirnika $\varphi(t)$. Kąt ten z pewnością nie może być przedstawiony w postaci szeregu Fouriera, co jest wymagane przy stosowaniu metody bilansu harmonicznych, gdyż jego wartość ciągle narasta w czasie. W tej sytuacji uwzględnienie przyjętych założeń odnośnie do pracy synchronicznej, warunków zasilania i amplitudy składowej okresowej w momencie mechanicznym niepowodującej wypadnięcia maszyny z synchronizmu pozwala na zapis,

$$\varphi(t) = (\Omega_s / p) \cdot t + \Delta\varphi(t); \quad \Delta\varphi(t) = \Delta\varphi(t + T) \quad (5)$$

który po podstawieniu do równania mechanicznego modyfikuje je do postaci:

$$J \frac{d^2 \Delta\varphi}{dt^2} + D \frac{d\Delta\varphi}{dt} = T_{em} + T_m(\varphi) - D(\Omega_s / p) \quad (6)$$

Równania obwodów elektrycznych maszyny (4a) uzupełnione zmodyfikowanym równaniem ruchu (6) posłużą jako punkt wyjścia do dalszych obliczeń.

3. Równania bilansu harmonicznych dla maszyny synchronicznej

W pracy [7] opisano korzystny sposób przedstawiania równań matematycznych ułatwiający obliczenia z wykorzystaniem metody bilansu harmonicznych. Stosując się do proponowanego zapisu zależności (4a) i (6), łączy się w jedno równanie wektorowe:

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (7)$$

w którym:

$$\mathbf{x} = [i^+ \quad i^- \quad i'_f \quad i'_D \quad i'_Q \quad \Delta\varphi]^T; \quad \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad J\Delta\varphi]^T;$$

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \Psi^+(i^+, i^-, i'_f, i'_D, i'_Q, \Delta\varphi) \\ \Psi^-(i^+, i^-, i'_f, i'_D, i'_Q, \Delta\varphi) \\ \Psi'_f(i^+, i^-, i'_f, i'_D, i'_Q, \Delta\varphi) \\ \Psi'_D(i^+, i^-, i'_f, i'_D, i'_Q, \Delta\varphi) \\ \Psi'_Q(i^+, i^-, i'_f, i'_D, i'_Q, \Delta\varphi) \\ D\Delta\varphi \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}_0(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} R_s i^+ + j\Omega_s \Psi^+(i^+, i^-, i'_f, i'_D, i'_Q, \Delta\varphi) - \sqrt{\frac{3}{2}}U \\ R_s i^- - j\Omega_s \Psi^-(i^+, i^-, i'_f, i'_D, i'_Q, \Delta\varphi) - \sqrt{\frac{3}{2}}U \\ R'_f i'_f - U'_f \\ R'_D i'_D \\ R'_Q i'_Q \\ -T_{em}(i^+, i^-, i'_f, i'_D, i'_Q, \Delta\varphi) - T_m(\varphi) + D\Omega_s / p \end{bmatrix}$$

Wektory \mathbf{x} , \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_1 i \mathbf{F}_0 przewiduje się w postaci zespolonych szeregów Fouriera o nieznanym okresie $T_x = 2\pi/\Omega_x = 1/f_x$:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k e^{jk\Omega_x t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} I_k^+ \\ I_k^- \\ I'_{f,k} \\ I'_{D,k} \\ I'_{Q,k} \\ \Phi_k \end{bmatrix} \cdot e^{jk\Omega_x t}; \quad \mathbf{F}_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{2,k} e^{jk\Omega_x t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} F_{2,k}^1 \\ F_{2,k}^2 \\ F_{2,k}^3 \\ F_{2,k}^4 \\ F_{2,k}^5 \\ F_{2,k}^6 \end{bmatrix} \cdot e^{jk\Omega_x t} \quad (8)$$

$$\mathbf{F}_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{1,k} e^{jk\Omega_x t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} F_{1,k}^1 \\ F_{1,k}^2 \\ F_{1,k}^3 \\ F_{1,k}^4 \\ F_{1,k}^5 \\ F_{1,k}^6 \end{bmatrix} \cdot e^{jk\Omega_x t}; \quad \mathbf{F}_0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{0,k} e^{jk\Omega_x t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} F_{0,k}^1 \\ F_{0,k}^2 \\ F_{0,k}^3 \\ F_{0,k}^4 \\ F_{0,k}^5 \\ F_{0,k}^6 \end{bmatrix} \cdot e^{jk\Omega_x t} \quad (9)$$

a następnie podstawia do równania wektorowego (7), co umożliwia otrzymanie algebraicznych związków między współczynnikami poszczególnych szeregów.

$$- \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (k\Omega_x)^2 \mathbf{F}_{2,k} e^{jk\Omega_x t} \right) + \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\Omega_x \mathbf{F}_{1,k} e^{jk\Omega_x t} \right) + \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{0,k} e^{jk\Omega_x t} \right) = \mathbf{0} \quad (10)$$

Kolejną czynnością jest bilansowanie szeregów polegające na porównaniu do siebie współczynników przy tych samych funkcjach bazowych po obydwu stronach równania (10). W rezultacie otrzymuje się układ nieskończenie wielu nieliniowych równań algebraicznych o nieskończonej liczbie niewiadomych (11). Wykorzystanie zaproponowanych w pracy [7] macierzowych i wektorowych reprezentacji szeregów Fouriera pozwala na zapis zależności (11) w skondensowanej postaci (11a), która ułatwi zapisy formalne w dalszych etapach pracy.

$$-\text{diag} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Omega^2 \\ \mathbf{0} \\ \Omega^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ F_{2,1} \\ F_{2,0} \\ F_{2,-1} \\ \vdots \end{bmatrix} + \text{diag} \begin{bmatrix} \vdots \\ j\Omega \\ \mathbf{0} \\ -j\Omega \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ F_{1,1} \\ F_{1,0} \\ F_{1,-1} \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots \\ F_{0,1} \\ F_{0,0} \\ F_{0,-1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (11)$$

gdzie:

$\Omega = 2\pi f_x \mathbf{E}$; \mathbf{E} – macierz jednostkowa o wymiarach $[6 \times 6]$

$$-(\Omega)^2 \cdot F_2(x) + j \cdot \Omega \cdot F_1(x) + F_0(x) = \mathbf{0} \quad (11a)$$

4. Wyznaczanie częstotliwości bazowej poszukiwanych rozwiązań

W celu wyznaczenia nieznanego okresu T_x przyjęto, że moment obciążenia silnika synchronicznego posiada składową stałą T_0 i składową monoharmoniczną o amplitudzie T_1 :

$$T_m(\varphi) = T_0 + T_1 \cdot \cos(M \cdot \varphi) \quad (12)$$

Okresowość momentu $T_m(\varphi)$ względem kąta daje się sprowadzić do okresowości względem czasu.

$$T_m(t) = T_m(t + T_x) \quad (13)$$

Powyższy zapis oznacza, że po upływie czasu T_x , powtarza się przebieg momentu obciążenia na wale silnika.

W stanie ustalonego synchronizmu i z uwzględnieniem przyjętego we wstępie sposobu zasilania prędkość kątowna silnika synchronicznego będzie się wahać okresowo z częstotliwością składowej przemiennej momentu mechanicznego f_x .

$$\omega(t) = \Omega_0 + \Delta\omega(t) = (\Omega_s/p) + \Delta\omega(t) = (\Omega_s/p) + \Delta\omega(t + T_x) \quad (14)$$

Z wyrażenia (14) i zależności $\frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega(t)$ wynika, że:

$$\varphi(t) = (\Omega_s/p) \cdot t + \Delta\varphi(t); \quad \Delta\varphi(t) = \Delta\varphi(t + T_x) \quad (15)$$

Moment obciążenia (12) przyjmuje po uwzględnieniu (13) i (15) następującą postać:

$$T_m(\varphi) = T_0 + T_1 \cdot \cos(M \cdot \varphi) = T_0 + T_1 \cdot \cos \left[M \cdot \left(\frac{\Omega_s}{p} \cdot t + \frac{\Omega_s}{p} \cdot T_x + \Delta\varphi(t) \right) \right] = T_m(t) \quad (16)$$

Aby po czasie T_x wyrażenie $T_0 + T_1 \cdot \cos \left[M \cdot \left(\frac{\Omega_s}{p} \cdot t + \frac{\Omega_s}{p} \cdot T_x + \Delta\varphi(t) \right) \right]$ było równe

wyrażeniu $T_0 + T_1 \cdot \cos \left[M \cdot \left(\frac{\Omega_s}{p} \cdot t + \Delta\varphi(t) \right) \right]$, co wynika z okresowości momentu $T_m(\varphi)$

względem kąta φ , to musi być spełniony warunek:

$$M \cdot \frac{\Omega_s}{p} \cdot t + M \cdot \frac{\Omega_s}{p} \cdot T_x + M \cdot \Delta\varphi(t) = M \cdot \frac{\Omega_s}{p} \cdot t + M \cdot \Delta\varphi(t) + 2\pi \quad (17)$$

Ostatecznie:

$$T_x = (p/M) \cdot T_s$$

gdzie:

$$T_s = 1/f_s - \text{okres zmian napięcia w sieci trójfazowej} \quad (18)$$

natomiast częstotliwość bazowa poszukiwanych rozwiązań wynosi:

$$f_x = (M/p) \cdot f_s \quad (19)$$

5. Rozwiązywanie równań bilansu harmoniczných

Nieliniowa zależność współczynników równania (11a) od poszukiwanego rozwiązania powoduje, że do jego rozwiązania należy zastosować metody numeryczne, które pozwalają jedynie na znalezienie rozwiązania przybliżonego. W rozpatrywanym przypadku zdecydowano się na procedurę iteracyjną Newtona-Raphsona o ogólnej postaci (20) ze względu na jej szybkość zbieżność.

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i - \mathbf{J}(\mathbf{x}^i)^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}^i) \quad (20)$$

gdzie:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -(\Omega)^2 \cdot \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) + j \cdot \Omega \cdot \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_0(\mathbf{x}) \quad (21)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = -(\Omega)^2 \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + j \cdot \Omega \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{F}_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = -(\Omega)^2 \cdot \mathbf{F}_{d,2}(\mathbf{x}) + j \cdot \Omega \cdot \mathbf{F}_{d,1}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_{d,0}(\mathbf{x}) \quad (22)$$

Do wyznaczenia macierzy $\mathbf{F}_{d,2}(\mathbf{x})$, $\mathbf{F}_{d,1}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{F}_{d,0}(\mathbf{x})$ zastosowano sposób postępowania opisany w pracy [8]. Zgodnie z nim należy najpierw zbudować macierze (23), dla których następnie tworzy się ich szeregi Fouriera (24) oraz macierzowe reprezentacje (25).

$$\mathbf{F}_{d,n}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{F}_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{n,1}}{\partial i^+} & \frac{\partial f_{n,1}}{\partial i^-} & \frac{\partial f_{n,1}}{\partial i'_f} & \frac{\partial f_{n,1}}{\partial i'_D} & \frac{\partial f_{n,1}}{\partial i'_Q} & \frac{\partial f_{n,1}}{\partial \Delta\varphi} \\ \frac{\partial f_{n,2}}{\partial i^+} & \frac{\partial f_{n,2}}{\partial i^-} & \frac{\partial f_{n,2}}{\partial i'_f} & \frac{\partial f_{n,2}}{\partial i'_D} & \frac{\partial f_{n,2}}{\partial i'_Q} & \frac{\partial f_{n,2}}{\partial \Delta\varphi} \\ \frac{\partial f_{n,3}}{\partial i^+} & \frac{\partial f_{n,3}}{\partial i^-} & \frac{\partial f_{n,3}}{\partial i'_f} & \frac{\partial f_{n,3}}{\partial i'_D} & \frac{\partial f_{n,3}}{\partial i'_Q} & \frac{\partial f_{n,3}}{\partial \Delta\varphi} \\ \frac{\partial f_{n,4}}{\partial i^+} & \frac{\partial f_{n,4}}{\partial i^-} & \frac{\partial f_{n,4}}{\partial i'_f} & \frac{\partial f_{n,4}}{\partial i'_D} & \frac{\partial f_{n,4}}{\partial i'_Q} & \frac{\partial f_{n,4}}{\partial \Delta\varphi} \\ \frac{\partial f_{n,5}}{\partial i^+} & \frac{\partial f_{n,5}}{\partial i^-} & \frac{\partial f_{n,5}}{\partial i'_f} & \frac{\partial f_{n,5}}{\partial i'_D} & \frac{\partial f_{n,5}}{\partial i'_Q} & \frac{\partial f_{n,5}}{\partial \Delta\varphi} \\ \frac{\partial f_{n,6}}{\partial i^+} & \frac{\partial f_{n,6}}{\partial i^-} & \frac{\partial f_{n,6}}{\partial i'_f} & \frac{\partial f_{n,6}}{\partial i'_D} & \frac{\partial f_{n,6}}{\partial i'_Q} & \frac{\partial f_{n,6}}{\partial \Delta\varphi} \end{bmatrix}; \quad n \in \{0,1,2\} \quad (23)$$

$$\mathbf{F}_{d,n}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{n,k}^d \cdot e^{jk\Omega_s t}; \quad n \in \{0,1,2\} \quad (24)$$

$$\mathbf{F}_{d,n}(x) = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \mathbf{F}_{n,0}^d & \mathbf{F}_{n,1}^d & \mathbf{F}_{n,2}^d & \cdots \\ \cdots & \mathbf{F}_{n,-1}^d & \mathbf{F}_{n,0}^d & \mathbf{F}_{n,1}^d & \cdots \\ \cdots & \mathbf{F}_{n,-2}^d & \mathbf{F}_{n,-1}^d & \mathbf{F}_{n,0}^d & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad \text{dla } n \in \{0,1,2\} \quad (25)$$

Wszystkie wektory i macierze w równaniu (20) mają wymiary nieskończone. Wykorzystanie do jego rozwiązania komputera narzuca konieczność ograniczenia poszczególnych elementów w związku (20) do rozmiarów skończonych.

Wartościami początkowymi (startowymi) dla użytej procedury iteracyjnej może być rozwiązanie stanu ustalonego w maszynie synchronicznej, obliczone przy założeniu, że moment mechaniczny posiada tylko składową stałą.

6. Wyniki badań dla okresowego momentu mechanicznego zależnego od kąta obrotu wirnika

W celu zbadania technicznej użyteczności opisanego algorytmu dokonano jego implementacji numerycznej w programie komercyjnym MATLAB. Do obliczeń użyto danych konstrukcyjnych silnika GAe-148s o danych znamionowych $P_N = 1250$ kW, $U_N = 6$ kV, $\cos\varphi_N = 0,9$, $n_N = 750$ obr/min, $J_s = 250$ kg·m². Badania symulacyjne przeprowadzono dla dwóch wybranych przypadków przebiegu okresowego momentu obciążenia na wale badanego silnika synchronicznego:

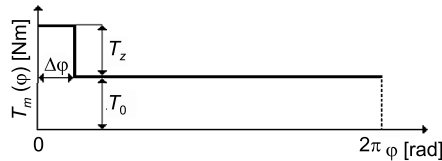
a) moment obciążenia opisano zależnością matematyczną (26), natomiast za wszystkie pozostałe parametry przyjęto dane znamionowe silnika:

$$T_m(\varphi) = T_N + 0,1T_N \cdot \cos(\varphi) \quad (26)$$

gdzie:

T_N – moment znamionowy silnika,

b) moment obciążenia zamodelowano w sposób pokazany na rysunku 1. Pozostałe wielkości użyte w symulacji przyjęto jako znamionowe zwiększając jedynie dwukrotnie moment bezwładności silnika $J = 2J_s$ i obniżając prąd wzbudzenia do poziomu $I'_f = 0,9I'_{fN}$.



Rys. 1. Moment oporowy z okresową składową impulsową dla $T_z = 10\,000$ Nm, $T_0 = 10\,000$ Nm, $\Delta\varphi = 0,2\pi$

Fig. 1. The moment of resistance of the periodic component of the pulse at $T_z = 10\,000$ Nm, $T_0 = 10\,000$ Nm, $\Delta\varphi = 0,2\pi$

Wyniki obliczeń numerycznych dla dwóch rozpatrywanych przypadków (a, b) zaprezentowano na kolejnych rysunkach (odpowiednio rys. 2 i rys. 3). Przedstawiają one widma amplitudowe kilku najważniejszych harmonicznych prądu stojana fazy „a”, prądu wzbudzenia oraz prędkości kątovej silnika z wykorzystaniem skali decybelowej, ze względu na duże różnice w wartościach poszczególnych harmonicznych. Przejście z prezentowanych w dziedzinie częstotliwości rozwiązań na przebiegi czasowe nie stanowi większego problemu. W tym celu należy otrzymane z algorytmu iteracyjnego (20) zbiory wartości współczynników I_k^+ , I_k^- , $I'_{f,k}$, $I'_{D,k}$, I'_{Qk} oraz ϕ_k o indeksach $-N \leq k \leq N$ podstawić do następujących szeregów Fouriera:

$$i_a(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\sum_{k=-N}^N I_k^+ \cdot e^{j(\Omega_s + k\Omega_x)t} + \sum_{k=-N}^N I_k^{+*} \cdot e^{-j(\Omega_s + k\Omega_x)t} \right] = \sum_{k=-N}^N I_k \cdot \cos[2\pi(f_s + k \cdot (f_s / p))t + \alpha_k^+] \quad (27)$$

$$i'_{f'}(t) = \sum_{k=-N}^N I'_{f,k} \cdot e^{jk\Omega_x t} = I_{f,0} + \sum_{k=1}^N I_{f,k} \cdot \cos(2\pi k \cdot (f_s / p)t + \beta_k) \quad (28)$$

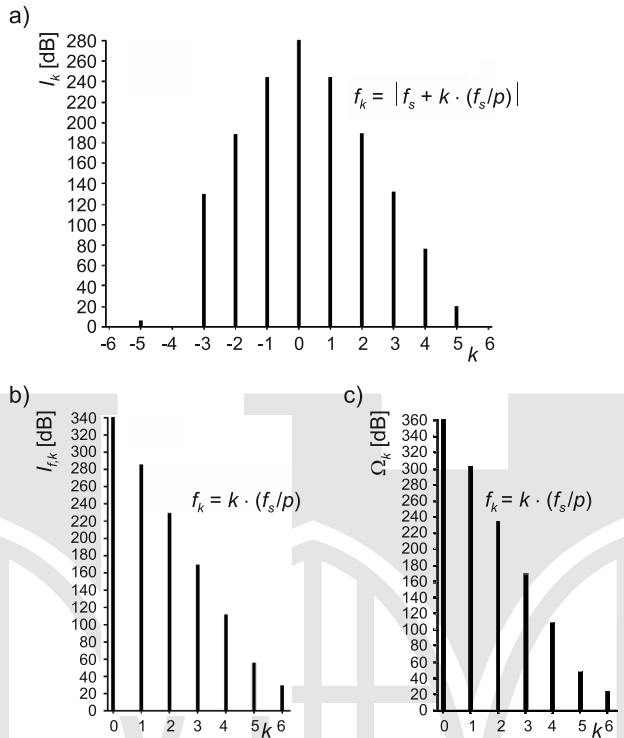
$$\omega(t) = \frac{\Omega_s}{p} + \sum_{\substack{k \neq 0 \\ k=-N}}^N jk\Omega_x \phi_k \cdot e^{jk\Omega_x t} = \frac{\Omega_s}{p} + \sum_{k=1}^N \Omega_k \cdot \cos(2\pi k \cdot (f_s / p)t + \gamma_k) \quad (29)$$

Charakter prezentowanych widm amplitudowych wielkości pomiarowo dostępnych w silniku synchronicznym ukazuje zależność pomiędzy rodzajem pojawiających się w poszczególnych przebiegach harmonicznych a występującym na wale maszyny synchronicznej momentem mechanicznym. Najbogatszym źródłem informacji są w obydwu przypadkach widma amplitudowe prądu stojana, które zawierają blisko dwukrotnie więcej harmonicznych niż odpowiadające im widma prądu wzbudzenia i prędkości kątovej.

W widmie z rysunku 2a dominuje harmoniczna I_0 o częstotliwości $f_0 = 50$ Hz. Kolejne harmoniczne o numerach I_{-1} i I_1 mające częstotliwości odpowiednio $f_{-1} = 37,5$ Hz i $f_1 = 62,5$ Hz posiadają amplitudy blisko stukrotnie mniejsze od amplitudy składowej I_0 . Podobnie wygląda sytuacja z kolejnymi harmonicznymi I_{-2} i I_2 , którym odpowiadają częstotliwości $f_{-2} = 25$ Hz i $f_2 = 75$ Hz. Ich amplitudy są już o ponad cztery rzędy wielkości mniejsze od amplitudy składowej zerowej. Brak w prezentowanym widmie harmonicznej I_{-4} wynika z faktu, że jej częstotliwość powinna wynosić $f_{-4} = 0$ Hz, co odpowiada wartości średniej prądu stojana fazy ‘a’. Dla przyjętych założeń wartość ta wynosi zero.

W widmie amplitudowym prądu wzbudzenia (rys. 2b) dominuje harmoniczna $I_{f,0}$ odpowiadająca wartości średniej tego prądu. Każda z kolejnych harmonicznych ma wartość mniejszą od poprzedniej, a różnica między dwoma kolejnymi składowymi wynosi co najmniej dwa rzędy wielkości. Takie same relacje można dostrzec pomiędzy poszczególnymi harmonicznymi widma prędkości kątovej wirnika (rys. 2c).

W przypadku momentu obciążenia ze składową impulsową w widmie prądu stojana (rys. 3a) również dominującą jest składowa I_0 o częstotliwości $f_0 = 50$ Hz. Amplitudy dwóch

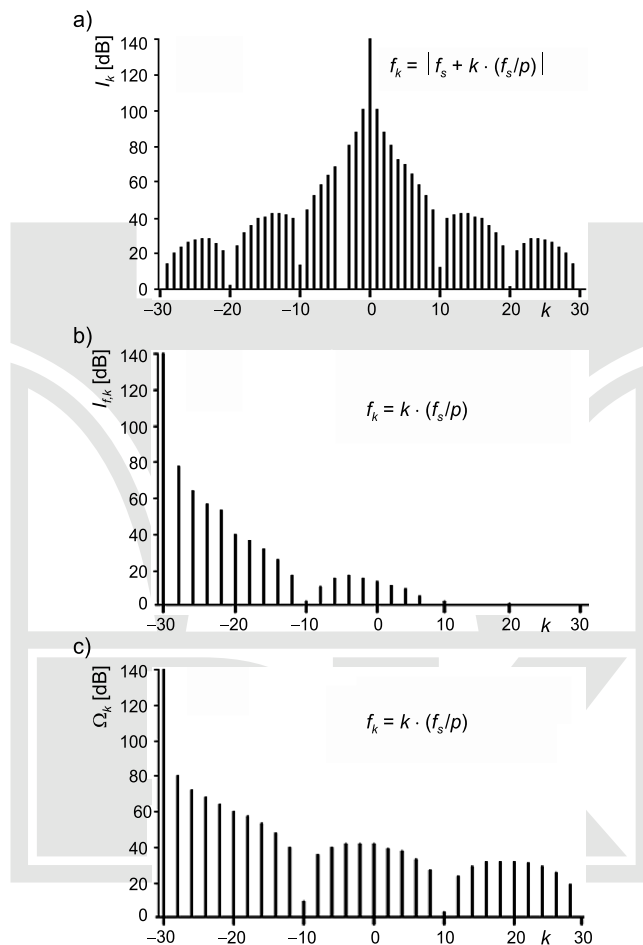


Rys. 2. Widma Fouriera dla momentu obciążenia ze składową monoharmoniczną: a) prądu stojana fazy „a” (poziom odniesienia $I_0 \cdot 10^{-14}$), b) prądu wzbudzenia (poziom odniesienia $I_{p0} \cdot 10^{-17}$), c) prędkości kątowej wirnika (poziom odniesienia $\Omega_0 \cdot 10^{-18}$)

Fig. 2. Fourier spectrum for the load torque of mono-harmonic component of a: a) stator current phase „a” (reference level $I_0 \cdot 10^{-14}$), b) rotor current, (reference level $I_{p0} \cdot 10^{-17}$), c) angular velocity (reference level $\Omega_0 \cdot 10^{-18}$)

kolejnych harmonicznych I_{-1} i I_1 o częstotliwościach odpowiednio 37,5 Hz i 62,5 Hz są od niej blisko sto razy mniejsze. Natomiast amplitudy składowych I_{-2} i I_2 o odpowiadających im częstotliwościach 25 Hz i 75 Hz są już około pięćsetkrotnie mniejsze od amplitudy składowej I_0 . Wartości kolejnych składowych widma osiągają coraz mniejsze amplitudy w stosunku do składowej zerowej. Brak obecności na omawianym rysunku składowej I_{-4} o częstotliwości $f_{-4} = |50 - 4 \cdot (50/4)| = 0$ Hz świadczy o braku różnej od zera wartości średniej prądu stojana. Zdecydowanie mniejsze od sąsiednich składników widma amplitudy harmonicznych o numerach $k = \pm 10, \pm 20, \pm 30$ są konsekwencją jedynie nieliniowości układu równań opisujących maszynę synchroniczną. Z zależności $f_k = |f_s + k \cdot (f_s/p)|$ wynika, że w widmie amplitudowym prądu stojana każda częstotliwość pojawia się dwukrotnie. Harmoniczne $I_{-3}, I_{-2}, I_{-1}, I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, \dots$ mają częstotliwości odpowiednio 12,5 Hz, 25 Hz, 37,5 Hz, 50 Hz, 62,5 Hz, 75 Hz, 87,5 Hz, 100 Hz, Takie same częstotliwości przypisane są do składowych $I_{-5}, I_{-6}, I_{-7}, I_{-8}, I_{-9}, I_{-10}, I_{-11}, I_{-12}, \dots$, z tą jednak różnicą, że składowe te

wirują w kierunku przeciwnym do kierunku wirowania harmonicznych $I_{-3}, I_{-2}, I_{-1}, I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, \dots$. Oznacza to, że prądy stojana będą niesymetryczne. Oczywiście dla dużych wartości k odpowiednie harmoniczne są bardzo małe, więc wspomniana asymetria prądów będzie praktycznie niezauważalna. Niewykluczone, że dla innych danych niesymetria prądów stojana będzie się powiększać i zjawisko asymetrii stanie się zauważalne.



Rys. 3. Widma Fouriera dla momentu obciążenia ze składową impulsową: a) prądu stojana fazy 'a' (poziom odniesienia $I_0 \cdot 10^{-7}$), b) prądu wzbudzenia (poziom odniesienia $I_{f,0} \cdot 10^{-7}$), c) prędkości kątowej wirnika (poziom odniesienia $\Omega_0 \cdot 10^{-7}$)

Fig. 3. Fourier spectrum for the load torque of the pulse component of a: a) stator current phase 'a' (reference level $I_0 \cdot 10^{-7}$), b) rotor current (reference level $I_{f,0} \cdot 10^{-7}$), c) angular velocity (reference level $\Omega_0 \cdot 10^{-7}$)

W widmie prądu wzbudzenia z rysunku 3b najwyższą wartość osiąga harmoniczna $I_{f,0}$ o częstotliwości 0 Hz. Amplituda kolejnej harmonicznej $I_{f,1}$ o częstotliwości równej 12,5 Hz

ma wartość ponad tysiącrotnie mniejszą od wartości składowej zerowej. Wraz ze wzrostem k maleją amplitudy kolejnych harmonicznych. Mniejsze wartości składników widma o numerach $k = 10, 20, \dots$ są spowodowane brakiem tychże harmonicznych w momencie obciążenia silnika. Rozkład widma Fouriera prędkości kątowej wirnika (rys. 3c) przypomina rozkład widma amplitudowego prądu wzbudzenia (rys. 3b). Różnica polega przede wszystkim na tym, że kolejne harmoniczne w widmie prędkości maleją wolniej niż w przypadku składowych $I_{f,k}$.

7. Wnioski

W artykule opisano algorytm, który pozwala na wyznaczanie stanu ustalonego w maszynie synchronicznej pracującej w stanie ustalonego synchronizmu i współpracującej z maszyną roboczą charakteryzującą się tym, że moment mechaniczny na wale maszyny synchronicznej zawiera okresową składową przemienną zależną od kąta obrotu wirnika. Otrzymane w wyniku zastosowania opisanej procedury rozwiązanie jest wyznaczone bezpośrednio w dziedzinie częstotliwości, a stanowią je między innymi widma Fouriera prądu stojana i prądu wzbudzenia oraz prędkości kątowej wirnika. Widma te charakteryzują się tym, że pozbawione są tła i zawierają tylko te składowe, które rzeczywiście są rozwiązaniem postawionego zagadnienia. W związku z tym prezentowany algorytm może stanowić przydatne narzędzie do analizy właściwości dynamicznych maszyn synchronicznych w fazie poznawczej i badawczej.

Literatura

- [1] Pawlik M., Strzelczyk F., *Elektrownie*, wydanie piąte zmienione, WNT, Warszawa 2009.
- [2] Laible Th., *Die Theorie der Synchronmaschine im nichtstationären Betrieb*, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1952.
- [3] Paszek W., *Dynamika maszyn elektrycznych prądu przemiennego*, Wydawnictwo Helion, Gliwice 1998.
- [4] Anuszczyk J., *Maszyny elektryczne w energetyce. Zagadnienia wybrane*, WNT, Warszawa 2005.
- [5] Skwarczyński J., Tertil Z., *Maszyny elektryczne*, Skrypt AGH nr 1510, Kraków 1997.
- [6] Radzik M., *Algorytm bezpośredniego określania stanów ustalonych w maszynach synchronicznych z uwzględnieniem równania ruchu*, praca doktorska, Politechnika Krakowska, Kraków 2011.
- [7] Sobczyk T.J., *Metodyczne aspekty modelowania matematycznego maszyn indukcyjnych*, WNT, Warszawa 2004.
- [8] Sobczyk T.J., *Direct determination of two-periodic solution for nonlinear dynamic systems*, Compel, James & James Science Pub. Ltd., Vol. 13, No. 3, 1994.