

ANDRZEJ BIELSKI\*

ZBIORNIKI UŚREDNIAJĄCE  
I RETENCYJNO-UŚREDNIAJĄCE W UKŁADACH  
TECHNOLOGICZNYCH INŻYNIERII ŚRODOWISKAAVERAGING AND RETENTION-AVERAGING TANKS  
IN TECHNOLOGICAL SYSTEMS  
OF ENVIRONMENTAL ENGINEERING

## Streszczenie

W artykule przedstawiono równania umożliwiające wyznaczenie zmian stężeń w czasie na wyjściu z pojedynczych zbiorników homogenicznych i kaskad zbiorników homogenicznych. Za pomocą tych równań można określić niezbędną pojemność urządzeń, która zapewni wymagany stopień wytlumienia oscylacji stężeń na ich wyjściu. Z dodatkowych obliczeń przeprowadzonych przez autora wynika, że kaskady homogenicznych zbiorników uśredniających i kaskady homogenicznych zbiorników retencyjno-uśredniających również wykazują podobne własności tłumiące oscylacje stężeń. Dla pewnych przypadków dynamiki zmian stężeń i czasów przebywania substancji w urządzeniu zbiornikowym, w celu wytlumienia oscylacji stężeń na tym samym poziomie, wymagana pojemność kaskady zbiornikowej może być mniejsza od pojemności pojedynczego zbiornika homogenicznego. Tłumienie oscylacji stężeń przez kaskadę zbiornikową może być lepsze od tłumienia przez pojedynczy zbiornik homogeniczny o tej samej pojemności co kaskada. Ten sam efekt tłumienia oscylacji stężeń można, w niektórych sytuacjach, uzyskać dla dwóch różnych kaskad zbiornikowych.

*Słowa kluczowe: zbiorniki, uśrednianie, stany nieustalone, woda, ścieki, zanieczyszczenia, retencjonowanie, układy technologiczne*

## Abstract

The paper presents equations to determine concentration changes in time at the outlet of single homogeneous tanks and homogeneous tank cascades. Using these equations, one can specify the required capacity of the facilities that will provide necessary damping of concentration oscillations at their outlets. The additional calculations performed by the author shows that the cascade of homogeneous averaging tanks and cascade of homogeneous retention-averaging tanks also exhibit similar properties of damping concentration oscillations. For some specific cases of dynamics of concentrations and residence times changes for the substances within the tank, to damp concentration oscillations at the same level, the required capacity of the cascade tank can be smaller than the capacity of a single homogeneous tank. Damping of concentration oscillations by a tank cascade may be better than the attenuation by a single homogeneous tank of the same capacity. The same concentration oscillations damping effect can be obtained for two different tank cascades, occasionally.

*Keywords: tanks, averaging, unsteady state, water, sewage, pollution, retention, technological systems*

\* Dr inż. Andrzej Bielski, Instytut Zaopatrzenia w Wodę i Ochrony Środowiska, Wydział Inżynierii Środowiska, Politechnika Krakowska.

## Oznaczenia

$\rho$	– gęstość cieczy [g/m <sup>3</sup> ]
$\Delta t$	– czas trwania wymuszenia skokowego [s]
$A$	– powierzchnia przekroju [m <sup>2</sup> ]
$\bar{A}$	– średnia powierzchnia przekroju [m <sup>2</sup> ]
$B$	– szerokość zbiornika [m]
$C$	– stężenie [g/m <sup>3</sup> ]
$C_0$	– stężenie na wejściu do zbiornika [g/m <sup>3</sup> ]
$C_1, C_2, C_3, \dots$	– stężenie na wyjściu ze zbiorników kaskady [g/m <sup>3</sup> ]
$C_{0,\text{śrd.}}$	– średnie stężenie na wejściu do zbiornika [g/m <sup>3</sup> ]
$C_0^{\text{max}}$	– maksymalne stężenie na wejściu do zbiornika [g/m <sup>3</sup> ]
$C_0^{\text{min}}$	– minimalne stężenie na wejściu do zbiornika [g/m <sup>3</sup> ]
$C_k$	– stężenie na wyjściu ze zbiornika na końcu wymuszenia skokowego o czasie trwania $\Delta t$ [g/m <sup>3</sup> ]
$C_{k,\text{śrd.}}$	– średnie stężenie na wyjściu ze zbiornika na końcu wymuszenia skokowego o czasie trwania $\Delta t$ [g/m <sup>3</sup> ]
$C_k^{\text{max}}$	– maksymalne stężenie na wyjściu ze zbiornika na końcu wymuszenia skokowego o czasie trwania $\Delta t$ [g/m <sup>3</sup> ]
$C_k^{\text{min}}$	– minimalne stężenie na wyjściu ze zbiornika na końcu wymuszenia skokowego o czasie trwania $\Delta t$ [g/m <sup>3</sup> ]
$h$	– wysokość napełnienia zbiornika [m]
$L$	– długość zbiornika [m]
$M_N$	– moduł transmitancji
$N$	– liczba elementów kaskady
$n$	– numer elementu kaskady
$Q$	– przepływ [m <sup>3</sup> /s]
$Q_0$	– dopływ do zbiornika [m <sup>3</sup> /s]
$Q_{\text{śrd.}}, \bar{Q}$	– średni przepływ [m <sup>3</sup> /s]
$t, \tau$	– czas [s]
$T$	– okres funkcji [s]
$t_k$	– czas mierzony do końca wymuszenia skokowego [s]
$V$	– pojemność, objętość [m <sup>3</sup> ]
$V_k$	– objętość cieczy w zbiorniku na końcu wymuszenia skokowego o czasie trwania $\Delta t$ [m <sup>3</sup> ]
$V_k^{\text{max}}$	– maksymalna objętość cieczy w zbiorniku na końcu wymuszenia skokowego o czasie trwania $\Delta t$ [m <sup>3</sup> ]
$V_n$	– objętość cieczy w $n$ -tym zbiorniku kaskady [m <sup>3</sup> ]
$V_{n,k}$	– objętość cieczy w $n$ -tym zbiorniku kaskady na końcu wymuszenia skokowego o czasie trwania $\Delta t$ [m <sup>3</sup> ]

$V_{\text{śrd.}}, \bar{V}$	– średnia objętość cieczy [m <sup>3</sup> ]
$V_z$	– wymagana pojemność zbiornika [m <sup>3</sup> ]
$v_x$	– prędkość [m/s]
$w$	– stopień wy tłumienia oscylacji wartości stężeń
$x$	– współrzędna liniowa [m]
$x_n$	– współrzędna końcowego przekroju zbiornika kaskady [m]

## 1. Wstęp

Układy technologiczne stosowane w inżynierii środowiska projektowane są zwykle na podstawie ustalonych wartości parametrów opisujących ilość i jakość płynów dozowanych do urządzeń układów. W przypadku oczyszczania wody lub ścieków stosowane są urządzenia przepływowe lub okresowe. Efektywność pracy danego urządzenia zależy od parametrów dopływającej cieczy. Zmiany w czasie wartości parametrów cieczy powodują zmiany efektywności pracy danego urządzenia. Podczas znacznych zmian wartości parametrów cieczy może wystąpić sytuacja, w której proces prowadzony w danym urządzeniu zachodzić będzie z bardzo małą efektywnością albo nie będzie zachodzić w ogóle. W celu uniknięcia niekorzystnych zmian efektów pracy urządzeń układu technologicznego spowodowanych zmianami parametrów dopływającej cieczy powinno się instalować, na początku układu, zbiorniki uśredniające stężenia substancji w cieczy lub zbiorniki uśredniające stężenia i przepływ [1, 2].

Z hydraulicznego punktu widzenia zbiorniki uśredniające lub retencyjno-uśredniające mogą być obiektami o charakterze homogenicznym lub kaskadami mniejszych obiektów (zbiorników) o charakterze jednorodnym. Kaskady mniejszych obiektów można traktować jak pojedynczy układ z przepływem dyspersyjnym [3, 4].

Zmiany przepływów i stężeń na wejściu do zbiornika powinny być tak przez niego tłumione, aby układ technologiczny mógł pracować optymalnie. Niewielkie zmiany stężeń i przepływów zwykle są tolerowane przez urządzenia układu technologicznego, ponieważ również one wykazują własności tłumiące. Wyznaczenie odpowiedniej pojemności zbiornika i liczby elementów kaskady dla zbiornika uśredniającego lub retencyjno-uśredniającego jest celem niniejszego artykułu.

## 2. Bilans masy dla homogenicznego zbiornika uśredniającego o stałym napelnieniu

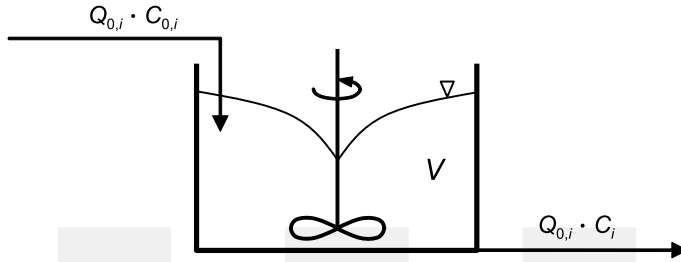
Przyjmijmy, że zmiany przepływów i stężeń w czasie w strumieniu zasilającym zbiornik o stałej objętości  $V$ , aproksymowane są za pomocą funkcji schodkowych. Czas trwania  $\Delta t$  wymuszenia skokowego powinien być tak dobrany, aby dokładność aproksymacji była wystarczająca. W przypadku technologii ścieków za wartość  $\Delta t$  można przyjmować np. 1 godzinę. Przyjęcie ostatecznej wartości  $\Delta t$  zależy od intensywności zmian przepływów i stężeń na wejściu do zbiornika.

Bilans masy dla substancji o stężeniu  $C_{0,i}$  dopływającej ze strumieniem objętościowym  $Q_{0,i}$  dla  $i$ -tego wymuszenia skokowego jest następujący (rys. 1):

$$Q_{0,i} C_{0,i} dt = VdC + Q_{0,i} Cdt \quad (1)$$

Całkowanie powyższego równania w odpowiednich granicach może być zapisane następująco:

$$\int_0^t \frac{d\tau}{V} = \int_{C_{k,i-1}}^{C_i} \frac{dC}{Q_{0,i}(C_{0,i} - C)} \quad (2)$$



Rys. 1. Rysunek pomocniczy do bilansu masy dla zbiornika homogenicznego

Fig. 1. Auxiliary figure to the mass balance for homogeneous tanks

W równaniu (2) czas  $t \in \langle 0; \Delta t \rangle$ , natomiast  $C_{k,i-1}$  jest stężeniem, jakie istniało w zbiorniku i strumieniu wyjściowym w chwili  $\Delta t$  poprzedniego wymuszenia skokowego  $(i-1)$  – tj. na końcu poprzedniego wymuszenia. Rozwiązanie równania (2) prowadzi do zależności:

$$C_i = C_{0,i} - (C_{0,i} - C_{k,i-1}) \exp\left(-\frac{Q_{0,i}}{V} t\right) \quad (3)$$

Jeżeli przyjąć, że:

$$t = \Delta t = t_{k,i} - t_{k,i-1} \quad (4)$$

wtedy z równania (3) można obliczyć stężenie  $C_{k,i}$ , jakie istniało w zbiorniku i strumieniu wyjściowym w chwili  $\Delta t$  aktualnego  $i$ -tego wymuszenia skokowego – tj. na końcu tego wymuszenia, a więc:

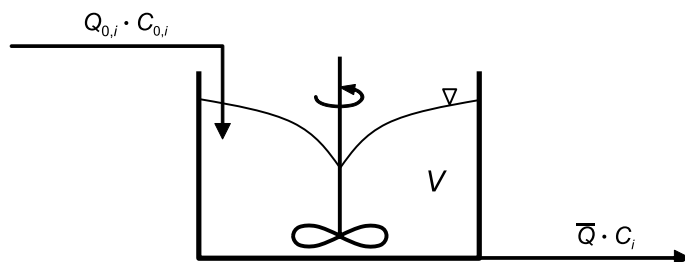
$$C_{k,i} = C_{0,i} - (C_{0,i} - C_{k,i-1}) \exp\left(-\frac{Q_{0,i}}{V} \Delta t\right) \quad (5)$$

Równanie (5) może być wykorzystane do obliczania stężeń na wyjściu z pojedynczego zbiornika homogenicznego lub kaskady zbiorników homogenicznych, przy zmiennych w czasie: przepływach, stężeniach, ale stałej objętości cieczy w zbiorniku (zbiornikach) – stałym napełnieniu.

### 3. Bilans masy dla homogenicznego zbiornika retencyjno-uśredniającego

W przypadku tego typu zbiornika jego napełnienie zmienia się w czasie. Dla skokowo zmieniających się przepływów napełnienie  $V$  w czasie  $t \in \langle 0; \Delta t \rangle$ , dla  $i$ -tego wymuszenia, dane jest zależnością (rys. 2):

$$V = V_{k,i-1} + (Q_{0,i} - \bar{Q}) \cdot t \quad (6)$$



Rys. 2. Rysunek pomocniczy do bilansu masy dla homogenicznego zbiornika retencyjno-uśredniającego o zmiennym napełnieniu

Fig. 2. Auxiliary figure to the mass balance for the homogeneous retention-averaging tank with variable filling

W chwili:

$$t = \Delta t = t_{k,i} - t_{k,i-1} \quad (7)$$

napełnienie zbiornika na końcu  $i$ -tego wymuszenia wyniesie:

$$V_{k,i} = V_{k,i-1} + (Q_{0,i} - \bar{Q}) \cdot \Delta t \quad (8)$$

W przypadku okresowych zmian przepływów:

$$\bar{Q} = \frac{1}{T} \int_0^T Q_0(t) dt \quad (9)$$

Dla skokowych zmian, przy stałej wartości  $\Delta t$ :

$$\bar{Q} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} Q_{0,i}, \quad N = \frac{T}{\Delta t} \quad (10)$$

Bilans masy dla substancji o stężeniu  $C_{0,i}$  dopływającej ze strumieniem objętościowym  $Q_{0,i}$  dla  $i$ -tego wymuszenia skokowego jest następujący (rys. 2):

$$Q_{0,i} C_{0,i} dt = d(VC) + \bar{Q} C dt \quad (11)$$

Z równania (11) wynika następujące równanie różniczkowe:

$$Q_{0,i} C_{0,i} = V \frac{dC}{dt} + C \frac{dV}{dt} + \bar{Q} C \quad (12)$$

Wykorzystując zależność (6) równanie (12) przekształca się do postaci:

$$Q_{0,i} C_{0,i} = [V_{k,i-1} + (Q_{0,i} - \bar{Q}) \cdot t] \frac{dC}{dt} + C(Q_{0,i} - \bar{Q}) + \bar{Q} C \quad (13)$$

Całkowanie równania (13) w odpowiednich granicach może być zapisane następująco:

$$\int_0^t \frac{d\tau}{V_{k,i-1} + (Q_{0,i} - \bar{Q}) \cdot \tau} = \int_{C_{k,i-1}}^{C_i} \frac{dC}{Q_{0,i} (C_{0,i} - C)} \quad (14)$$

Po wykonaniu całkowania otrzymujemy zależność:

$$C_i = C_{0,i} - (C_{0,i} - C_{k,i-1}) \cdot \left( 1 + \frac{Q_{0,i} - \bar{Q}}{V_{k,i-1}} \cdot t \right)^{\frac{-Q_{0,i}}{Q_{0,i} - \bar{Q}}} \quad (15)$$

W chwili:

$$t = \Delta t = t_{k,i} - t_{k,i-1} \quad (16)$$

stężenie w strumieniu opuszczającym zbiornik określa zależność:

$$C_{k,i} = C_{0,i} - (C_{0,i} - C_{k,i-1}) \cdot \left( 1 + \frac{Q_{0,i} - \bar{Q}}{V_{k,i-1}} \cdot \Delta t \right)^{\frac{-Q_{0,i}}{Q_{0,i} - \bar{Q}}} \quad (17)$$

W sytuacji gdy czas  $\Delta t$  trwania wymuszenia skokowego jest bardzo mały, wtedy:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{Q_{0,i} - \bar{Q}}{V_{k,i-1}} \cdot \Delta t \right)^{\frac{-Q_{0,i}}{Q_{0,i} - \bar{Q}}} &= \frac{\lim_{V_{k,i-1}}}{(Q_{0,i} - \bar{Q}) \cdot \Delta t} \rightarrow +\infty \left( 1 + \frac{1}{\frac{V_{k,i-1}}{(Q_{0,i} - \bar{Q}) \cdot \Delta t}} \right)^{\frac{V_{k,i-1}}{(Q_{0,i} - \bar{Q}) \cdot \Delta t} \cdot \frac{-Q_{0,i} \Delta t}{V_{k,i-1}}} = \\ &= \exp \left( - \frac{Q_{0,i}}{V_{k,i-1}} \cdot \Delta t \right) \end{aligned} \quad (18)$$

i równanie (17) przyjmuje postać:

$$C_{k,i} = C_{0,i} - (C_{0,i} - C_{k,i-1}) \cdot \exp \left( - \frac{Q_{0,i}}{V_{k,i-1}} \cdot \Delta t \right) \quad (19)$$

Jeżeli dodatkowo napełnienie  $V$  zbiornika jest stałe, to równanie (19) jest identyczne z równaniem (5) wyprowadzonym dla homogenicznego zbiornika uśredniającego o stałym napełnieniu. Równanie (19) nie jest jednak wygodne w praktycznym zastosowaniu, ponieważ czasy  $\Delta t$  musiałyby być niezmiernie małe, co wydłużałoby czas obliczeń, a wyniki obliczeń byłyby bardzo dużymi zbiorami liczb.

Gdyby w czasie obliczeń przepływ:  $Q_{0,i} = \bar{Q}$ , wtedy stężenia należy określać za pomocą równania (19).

Równania (17) nie da się wykorzystać w obliczeniach dla kaskady homogenicznych zbiorników retencyjno-uśredniających.

#### 4. Bilans masy kaskady homogenicznych zbiorników retencyjno-uśredniających

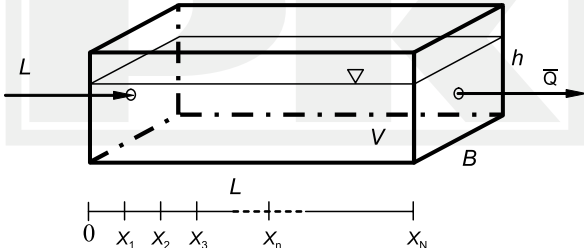
Kaskada zbiorników homogenicznych jest układem zastępczym dla zbiornika pozbawionego cech jednorodności. W celu utworzenia modelu umożliwiającego obliczanie stężeń na wyjściu z kaskady homogenicznych zbiorników retencyjno-uśredniających konieczne jest posłużenie się równaniem ciągłości cieczy nieściśliwej dla koryta otwartego [5, 6], w postaci:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (20)$$

Przyjmijmy, że przy wolno zmieniających się przepływach, małych prędkościach przepływu przez zbiornik zmiany prędkości w czasie i po długości zbiornika są nieistotne. Przy takich założeniach z równania bilansu pędu [4, 5] wynika, że nachylenie zwierciadła cieczy w kierunku przepływu, wzdłuż zbiornika, jest równe oporom ruchu cieczy. W związku z tym istnieje równanie umożliwiające powiązanie rzędnej zwierciadła  $H$  z prędkością  $v_x$  lub przepływem  $Q$ . Równanie takie jest niezbędne do całkowania równania (20). Niekiedy, zamiast takiego równania, wykorzystywany jest przybliżony związek wiążący przepływ  $Q$  i przekrój poprzeczny  $A$  – ogólnie:

$$A = f(Q) \quad (21)$$

Układ równań (20), (21) nazywany jest aproksymacją fali kinematycznej i wykorzystywany jest do opisu pewnych przypadków przepływów w stanach nieustalonych [5, 7]. Postać zależności (21) można również ustalić na podstawie wzoru Manninga lub Chezy [5–7]. W tym jednak przypadku, przy ustalonej średniej wartości odpływu  $\bar{Q}$  zależność (21) wprowadzona zostanie na podstawie bilansu masy dla przepływającej przez zbiornik cieczy. Bilans taki jest następujący (rys. 3):

$$Q_0(t) \cdot \rho \cdot dt = \rho \cdot dV + \bar{Q} \cdot \rho \cdot dt \quad (22)$$


Rys. 3. Rysunek pomocniczy do bilansu masy cieczy przepływającej przez zbiornik retencyjno-uśredniający

Fig. 3. Auxiliary figure to the mass balance of liquid flowing through the retention-averaging tank

Z powyższego bilansu wynika równanie różniczkowe w postaci:

$$\frac{dV}{dt} = Q_0(t) - \bar{Q} \quad (23)$$

Jeżeli przyjąć, że (rys. 3):

$$V = \bar{A} \cdot L \approx A \cdot L \quad (24)$$

wtedy, na podstawie (23), (24) można napisać, że:

$$L \frac{dA}{dt} = Q_0(t) - \bar{Q} \quad (25)$$

W tej sytuacji, korzystając z równań (20), (25), pochodna:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{L}(Q_0(t) - \bar{Q}) \quad (26)$$

Przyjmując warunek brzegowy:

$$Q = Q_0(t) \quad \text{dla} \quad x = 0 \quad (27)$$

Rozwiązanie równania (26) jest następujące:

$$Q(x, t) = Q_0(t) - \frac{x}{L}(Q_0(t) - \bar{Q}) \quad (28)$$

Podzielmy na  $N$  części zbiornik w kierunku długości  $L$  (rys. 3). Współrzędne:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots, x_N$  wyznaczają końcowe przekroje mniejszych zbiorników tworzących kaskadę. Jeżeli odstęp między współrzędnymi  $x$  są takie same, to:

$$x_n = \frac{n}{N}L \quad (29)$$

Napełnienie w  $n$ -tym zbiorniku dla  $i$ -tego wymuszenia skokowego zmienia się z czasem  $t \in \langle 0; \Delta t \rangle$  i może być obliczone na podstawie znajomości różnicy między odpływem a dopływem i napełnienia zbiornika  $V_{n,k,i-1}$  na końcu  $(i-1)$  wymuszenia, a więc (rys. 4):

$$V_n = V_{n,k,i-1} + \left[ \left( Q_{0,i} - \frac{n-1}{N}(Q_{0,i} - \bar{Q}) \right) - \left( Q_{0,i} - \frac{n}{N}(Q_{0,i} - \bar{Q}) \right) \right] \cdot t = V_{n,k,i-1} + \frac{1}{N}[Q_{0,i} - \bar{Q}] \cdot t \quad (30)$$

Bilans masy dla  $n$ -tego zbiornika można zapisać następująco:

$$\left( Q_{0,i} - \frac{n-1}{N}(Q_{0,i} - \bar{Q}) \right) \cdot C_{0,i} \cdot dt = d(V_n C) + \left( Q_{0,i} - \frac{n}{N}(Q_{0,i} - \bar{Q}) \right) \cdot C \cdot dt \quad (31)$$

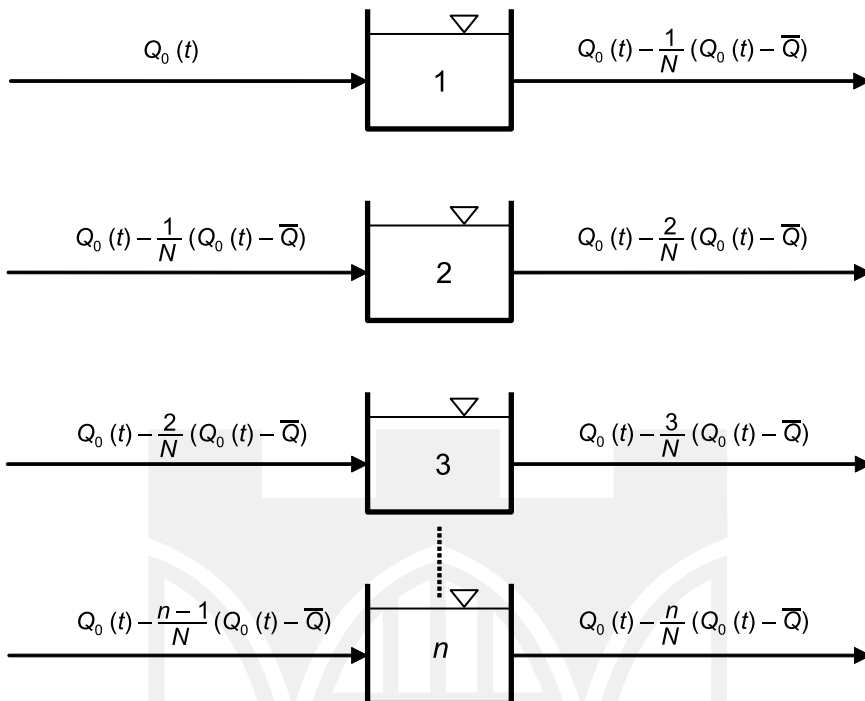
Z równania (31) wynika następujące równanie różniczkowe:

$$\left( Q_{0,i} - \frac{n-1}{N}(Q_{0,i} - \bar{Q}) \right) \cdot C_{0,i} = V_n \frac{dC}{dt} + C \frac{dV_n}{dt} + \left( Q_{0,i} - \frac{n}{N}(Q_{0,i} - \bar{Q}) \right) \cdot C \quad (32)$$

Wykorzystując zależność (30), można przekształcić równanie (32) do następującej postaci:

$$\begin{aligned} \left( Q_{0,i} - \frac{n-1}{N}(Q_{0,i} - \bar{Q}) \right) \cdot C_{0,i} = & \left\{ V_{n,k,i-1} + \frac{1}{N}[Q_{0,i} - \bar{Q}] \cdot t \right\} \frac{dC}{dt} + \\ & + C \frac{1}{N}[Q_{0,i} - \bar{Q}] + \left( Q_{0,i} - \frac{n}{N}(Q_{0,i} - \bar{Q}) \right) \cdot C \end{aligned} \quad (33)$$





Rys. 4. Schematy zbiorników stanowiących elementy kaskady z zaznaczonymi strumieniami objętościowymi na wejściu i wyjściu

Fig. 4. Schemes of tanks representing elements of the cascade of reservoirs with marked volume flow of liquid for input and output

Po rozdzieleniu zmiennych równanie (33) może być zapisane w postaci całkowej:

$$\int_{C_{k,i-1}}^{C_{k,i}} \frac{dC}{\left(Q_{0,i} - \frac{n-1}{N}(Q_{0,i} - \bar{Q})\right) \cdot (C_{0,i} - C)} = \int_0^{\Delta t} \frac{dt}{\left\{V_{n,k,i-1} + \frac{1}{N}[Q_{0,i} - \bar{Q}] \cdot t\right\}} \quad (34)$$

Dla czasu  $t = \Delta t$  napełnienie w  $n$ -tym zbiorniku na końcu przedziału czasowego jest następujące (30):

$$V_{n,k,i} = V_{n,k,i-1} + \frac{1}{N}[Q_{0,i} - \bar{Q}] \cdot \Delta t \quad (35)$$

Z równania (35) wynika, że zmiana napełnienia dowolnego zbiornika kaskady, po każdym  $i$ -tym wymuszeniu skokowym o czasie trwania  $\Delta t$  jest taka sama. Jeżeli w chwili początkowej napełnienie każdego zbiornika kaskady było takie samo, to po  $i$ -tym wymuszeniu skokowym napełnienie każdego zbiornika kaskady jest również takie samo. W związku z tym iloczyn liczby zbiorników  $N$  i napełnienia  $V_{n,k,i-1}$  dowolnego  $n$ -tego zbiornika po  $(i-1)$  wymuszeniu jest napełnieniem  $V_{k,i-1}$  całego zbiornika po  $(i-1)$  wymuszeniu, a więc:

$$N \cdot V_{n,k,i-1} = V_{k,i-1} \quad (36)$$

Wykonując całkowania w równaniu (34) i korzystając ze związku (36), otrzymujemy wyrażenie opisujące stężenie  $C_{k,i}$  na końcu  $i$ -tego wymuszenia na wyjściu z całego zbiornika (z całej kaskady) w następującej postaci:

$$C_{k,i} = C_{0,i} - (C_{0,i} - C_{k,i-1}) \cdot \left( 1 + \frac{Q_{0,i} - \bar{Q}}{V_{k,i-1}} \cdot \Delta t \right)^{\frac{-Q_{0,i} - \frac{n-1}{N}(Q_{0,i} - \bar{Q})}{\frac{1}{N}(Q_{0,i} - \bar{Q})}} \quad (37)$$

Gdyby kaskada składała się tylko z jednego zbiornika, to:  $N = 1$ ,  $n = 1$  i wtedy równanie (37) przyjęłoby postać równania (17) dla pojedynczego homogenicznego zbiornika retencyjno-uśredniającego.

## 5. Wyznaczanie pojemności zbiornika

Zadaniem zbiorników uśredniających jest wytłumienie oscylacji wartości stężeń, a zbiorników retencyjno-uśredniających – wytłumienie oscylacji wartości stężeń i oscylacji wartości przepływów. Zbiorniki retencyjne mogą wytłumić oscylacje okresowo powtarzających się dopływów całkowicie, ponieważ odpływ z takiego zbiornika jest równy średniej całkowej względem czasu z dopływu ( $\bar{Q}$ ), a więc:

$$\bar{Q} = \frac{1}{T} \int_0^T Q_0(t) dt \quad (38)$$

W przypadku funkcji schodkowej o stałym interwale  $\Delta t$ :

$$\bar{Q} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} Q_{0,i}, \quad N = \frac{T}{\Delta t} \quad (39)$$

Całkowaną objętość cieczy zgromadzonej w zbiorniku retencyjnym lub kaskadzie zbiorników retencyjnych na końcu  $i$ -tego wymuszenia skokowego określa zależność:

$$V_{k,i} = V_{k,i-1} + [Q_{0,i} - \bar{Q}] \cdot \Delta t = V_{k,i=0} + \sum_{j=1}^{j=i} [Q_{0,j} - \bar{Q}] \cdot \Delta t \quad (40)$$

Objętość cieczy  $V_{k,i=0}$  znajdującej się w zbiorniku retencyjnym w chwili  $t = 0$  jest nieznaną i powinna być tak dobrana, aby spełnione były dwa warunki:

$$\forall i \in \langle 1, N \rangle: V_{k,i} \geq 0 \quad (41)$$

$$\forall t > 0: \frac{C_0^{\max} - C_0^{\min}}{C_k^{\max} - C_k^{\min}} \leq w \quad (42)$$

Wartość współczynnika  $w$  określa stopień wytłumienia oscylacji wartości stężeń. Im większa wartość  $w$  tym objętość  $V_{k,i=0}$  musi być większa i tym samym zwiększa się pojemność zbiornika  $V_z$  ( $V_z$  jest maksymalną wymaganą pojemnością równą  $V_{k,i}^{\max}$  dla  $i \in \langle 1, N \rangle$ ).

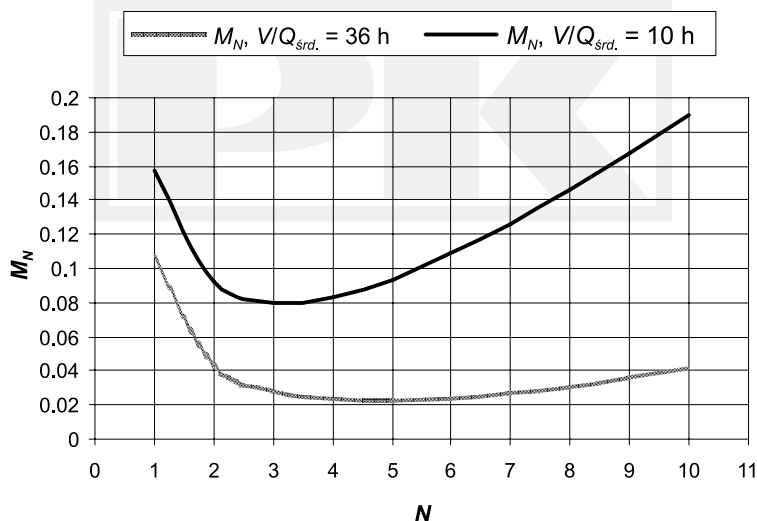
W przypadku zbiornika uśredniającego objętość cieczy  $V$  jaka powinna być w nim zgromadzona jest stała w czasie, lecz nieznaną i powinna być tak dobrana aby spełniony był warunek (42).

Na rysunkach: 6, 8, 10, 12 przedstawiono przykładowy dopływ  $Q$  do zbiorników i kaskad zbiorników w postaci takiej samej okresowej funkcji o okresie 24 h. Na rysunkach: 5, 7, 9, 11 przykładowe stężenie  $C_0$ , pewnej substancji w strumieniu zasilającym zbiorniki i kaskady zbiorników, zmienia się tak samo zgodnie z funkcją okresową o okresie 24 h.

W celu określenia pojemności  $V_{k,i=0}$  oraz  $V_z$  zbiorników i kaskad przyjęto założenie, że stopień tłumienia  $w = 6$  dla wszystkich obiektów. Z teorii wiadomo [3, 8], że tych samych rozmiarów obiekty, w zależności od hydrodynamiki przepływu, wykazują różne zdolności tłumienia sygnału. Z obliczeń autora wynika, że przy określonej częstotliwości zmian stężenia, zbiorniki homogeniczne o pojemności  $V$  mogą wykazywać słabsze tłumienie oscylacji stężeń niż tej samej pojemności, co pojedynczy zbiornik, kaskada  $N$  zbiorników. Takie zachowanie urządzeń uzasadnia analiza modułu  $M_N$  transmitancji [9] sygnału sinusoidalnego (w tym wypadku stężenia), którego postać dla  $N$  homogenicznych zbiorników dana jest wzorem:

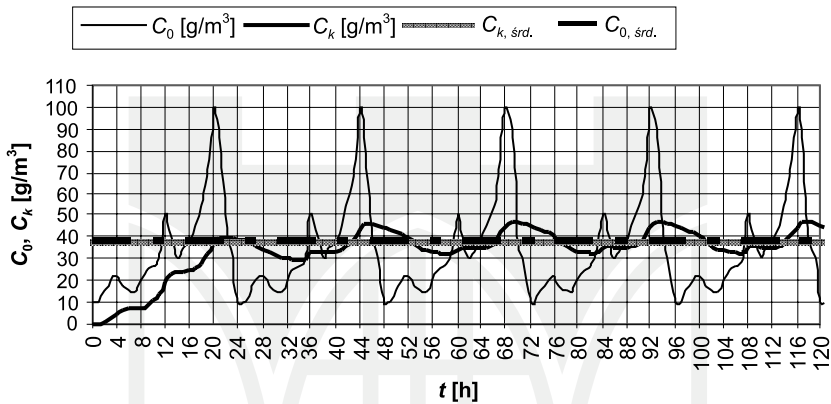
$$M_N = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{V}{\bar{Q} \cdot N}\right)^2\right]^{N/2}} \quad (43)$$

Dla okresu  $T = 24$  h oraz dwóch przykładowych średnich czasów przebywania substancji w układzie zbiornikowym  $V/\bar{Q} = \{10 \text{ h}, 36 \text{ h}\}$ , przebieg transmitancji przedstawiono na rys. 5.



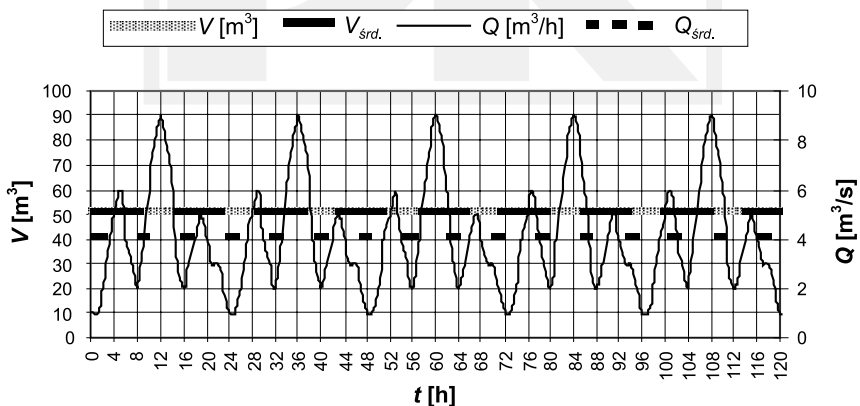
Rys. 5. Przebieg modułu transmitancji  $M_N$  w funkcji liczby  $N$  elementów kaskady zbiornikowej  
 Fig. 5. Graph of module transmittance  $M_N$  as a function of the number  $N$  of elements cascade tanks

Z wykresów na rysunku 5 wynika, że dopiero od pewnej, dostatecznie dużej liczby  $N$  elementów kaskady tłumienie oscylacji stężeń może być gorsze niż pojedynczego zbiornika. Ponadto ten sam efekt tłumienia oscylacji stężeń można uzyskać dla dwóch różnych kaskad zbiornikowych. Oczywiście dla kaskady składającej się z nieskończonej liczby obiektów moduł  $M_N$  transmitancji dąży do 1,0. Oznacza to, że taki obiekt nie wykazuje żadnego tłumienia oscylacji stężeń – (przypadek przepływu tłokowego, transport adwekcyjny). W związku z tym zmniejszaniu wartości liczby Pecleta [3, 8], czyli wzrostowi efektów dyspersji masy nie musi odpowiadać efekt zmniejszania średniej pojemności zbiornika niezbędnej do wytłumienia oscylacji stężeń na odpowiednim poziomie.



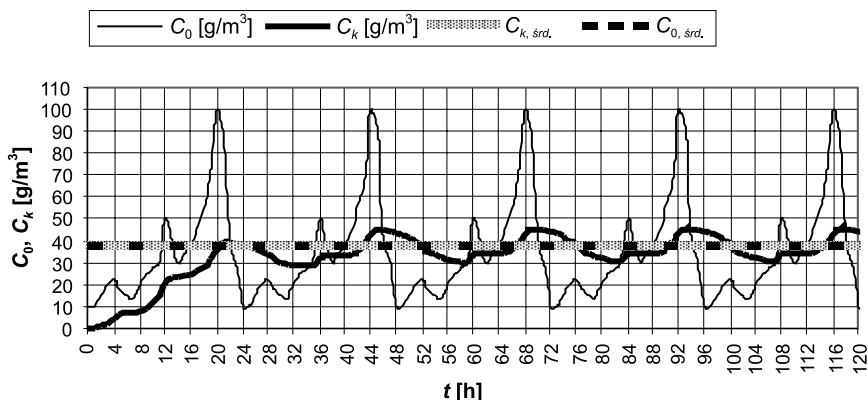
Rys. 6. Przebiegi stężeń  $C_0$  na wejściu oraz  $C_k$  na wyjściu ze zbiornika uśredniającego ( $C_{0, \text{srđ.}}$  – średnie stężenie na wejściu,  $C_{k, \text{srđ.}}$  – średnie stężenie na wyjściu)

Fig. 6. Graphs of the input concentration  $C_0$  and output concentration  $C_k$  from the averaging tank ( $C_{0, \text{srđ.}}$  – the average input concentration,  $C_{k, \text{srđ.}}$  – the average output concentration)



Rys. 7. Przebieg dopływu  $Q$  w czasie do zbiornika uśredniającego, pojemność  $V$  jest stała w czasie

Fig. 7. Graph of inflow  $Q$  versus time to the averaging tank, volume  $V$  is constant in time

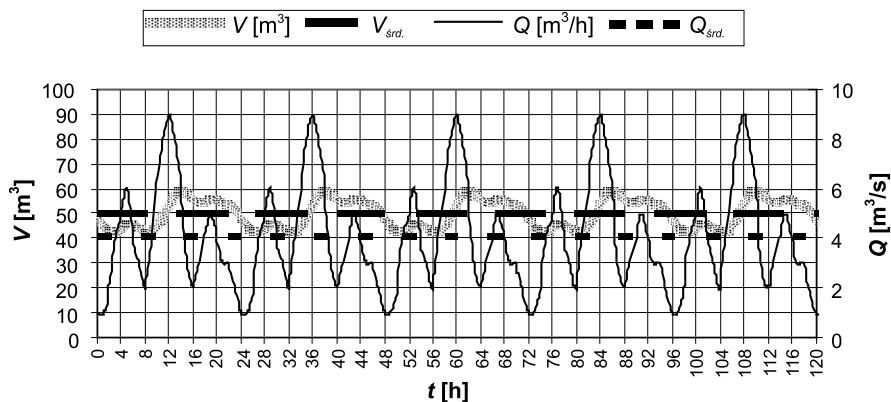


Rys. 8. Przebiegi stężeń  $C_0$  na wejściu oraz  $C_k$  na wyjściu ze zbiornika retencyjno-uśredniającego ( $C_{0,srd.}$  – średnie stężenie na wejściu,  $C_{k,srd.}$  – średnie stężenie na wyjściu)

Fig. 8. Graphs of the input concentration  $C_0$  and output concentration  $C_k$  from the retention-averaging tank ( $C_{0,srd.}$  – the average input concentration,  $C_{k,srd.}$  – the average output concentration)

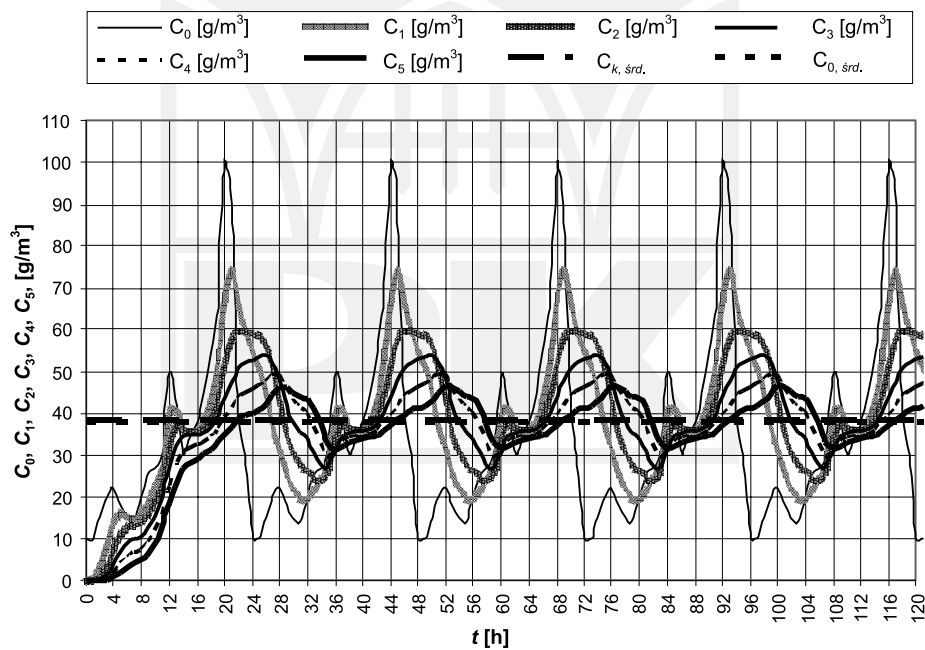
Na rysunkach: 7, 11 zaznaczono niezmiennie w czasie napełnienie, a na rysunkach: 9, 13 zmiany napełnień  $V$  w czasie i napełnienie średnie  $\bar{V}$ . Z wykresów wynika, że jeżeli wielkość kaskady nie jest duża (w tym wypadku 5 elementów), to średnie pojemności: homogenicznego zbiornika uśredniającego, homogenicznego zbiornika retencyjno-uśredniającego i kaskady 5 homogenicznych zbiorników uśredniających są do siebie zbliżone i wynoszą odpowiednio:  $50,94 \text{ m}^3$  (rys. 7),  $50,20 \text{ m}^3$  (rys. 9),  $50,49 \text{ m}^3$  (rys. 11). W przypadku kaskady 5 homogenicznych zbiorników retencyjno-uśredniających średnia pojemność wzrasta do  $54,86 \text{ m}^3$  (rys. 13). Z obliczeń autora wynika, że dla kaskady 10 homogenicznych zbiorników uśredniających średnia pojemność wyniosłaby  $64,90 \text{ m}^3$ , a dla kaskady 10 homogenicznych zbiorników retencyjno-uśredniających średnia pojemność byłaby równa  $70,57 \text{ m}^3$ . Oczywiście faktyczne pojemności zbiorników retencyjnych są większe, ponieważ zmienia się w czasie napełnienie tych urządzeń. W związku z tym dla homogenicznego zbiornika retencyjno-uśredniającego  $V_z = 59,24 \text{ m}^3$  (rys. 9), a dla kaskady 5 homogenicznych zbiorników retencyjno-uśredniających  $V_z = 63,90 \text{ m}^3$  (rys. 13); (w przypadku 10 elementowej kaskady pojemność ta byłaby równa  $V_z = 79,61 \text{ m}^3$ ). Gdyby stopień tłumienia  $w = 20$  dla wszystkich urządzeń, to pojemności (średnie pojemności w przypadku urządzeń retencyjnych) byłyby następujące: dla zbiornika uśredniającego  $168,07 \text{ m}^3$ , dla zbiornika retencyjno-uśredniającego  $166,34 \text{ m}^3$ , dla kaskady 5 zbiorników uśredniających  $89,24 \text{ m}^3$ , dla kaskady 5 zbiorników retencyjno-uśredniających  $92,72 \text{ m}^3$ . Wyniki obliczeń dla  $w = 20$  uzasadniają słuszność wniosku wynikającego z analizy modułu transmitancji (43).

Przebiegi stężeń  $C_k$  w czasie na wyjściu z pojedynczego zbiornika lub z każdego ze zbiorników kaskady przedstawiono na rysunkach: 6, 8, 10, 12. Należy zauważyć, że od chwili rozpoczęcia eksploatacji urządzeń czas potrzebny do uzyskania stabilizacji zmian stężeń na wyjściu jest różny. Czas ten dla pojedynczych zbiorników homogenicznych jest dłuższy, w tym wypadku wynosi około 70 h, natomiast dla kaskad krótszy i wynosi w tym wypadku około 28 h.



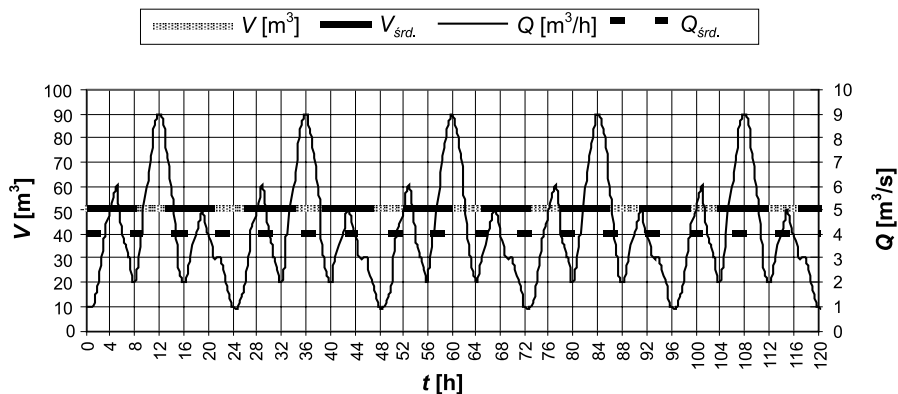
Rys. 9. Przebieg dopływu  $Q$  w czasie do zbiornika retencyjno-uśredniającego oraz przebieg zmian napełnienia  $V$  w czasie

Fig. 9. Graph of inflow  $Q$  versus time to the retention-averaging tank and graph of volume  $V$  changes versus time



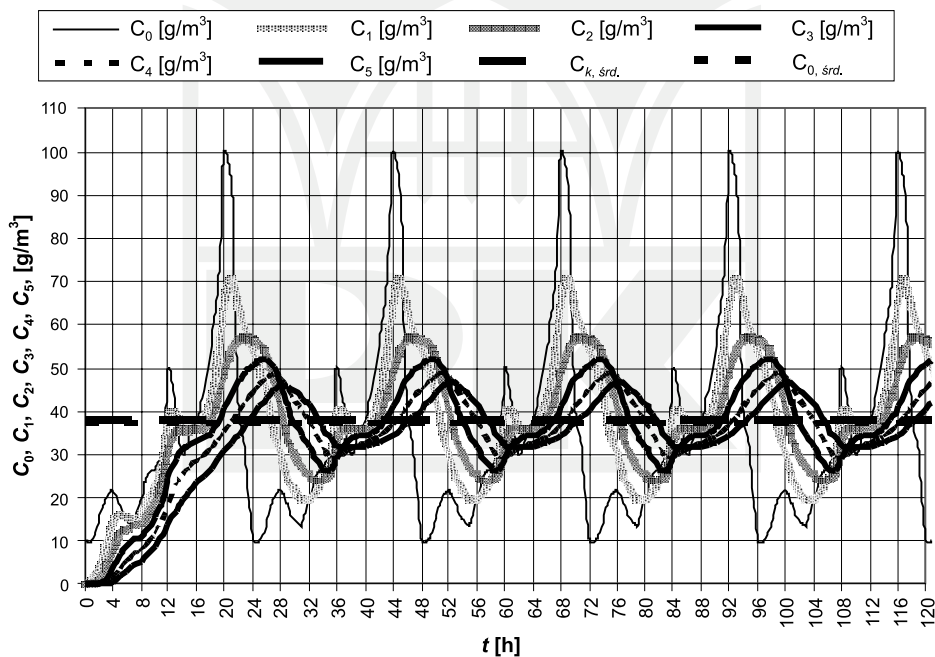
Rys. 10. Przebiegi stężeń  $C_0$  na wejściu oraz  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  na wyjściu z kolejnych zbiorników uśredniających kaskady 5 zbiorników ( $C_{0,srd}$  – średnie stężenie na wejściu,  $C_{k,srd}$  – średnie stężenie  $C_5$  na wyjściu)

Fig. 10. Graphs of the input concentration  $C_0$  and output concentration  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  from the single averaging reservoirs included in cascade of five tanks ( $C_{0,srd}$  – the average input concentration,  $C_{k,srd}$  – the average output concentration of  $C_5$ )



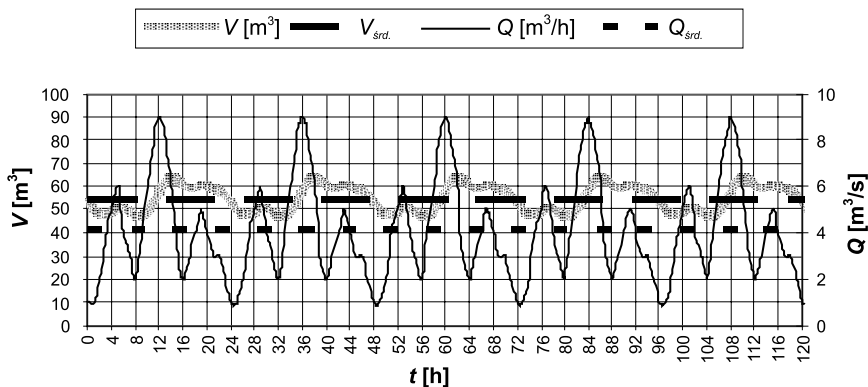
Rys. 11. Przebieg dopływu  $Q$  w czasie do kaskady 5 zbiorników uśredniających, napełnienie  $V$  kaskady jest stałe w czasie

Fig. 11. Graph of inflow  $Q$  versus time to the cascade of five averaging tanks, volume  $V$  of cascade is constant in time



Rys. 12. Przebiegi stężeń  $C_0$  na wejściu oraz  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  na wyjściu z kolejnych zbiorników retencyjno-uśredniających kaskady 5 zbiorników ( $C_{0,\text{śrd.}}$  – średnie stężenie na wejściu,  $C_{k,\text{śrd.}}$  – średnie stężenie  $C_5$  na wyjściu)

Fig. 12. Graphs of the input concentration  $C_0$  and output concentration  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  from the single retention-averaging reservoirs included in cascade of five tanks ( $C_{0,\text{śrd.}}$  – the average input concentration,  $C_{k,\text{śrd.}}$  – the average output concentration of  $C_5$ )



Rys. 13. Przebieg dopływu  $Q$  w czasie do kaskady 5 zbiorników retencyjno-uśredniających oraz przebieg zmian napężenia  $V$  kaskady w czasie

Fig. 13. Graph of inflow  $Q$  versus time to the cascade of five retention-averaging tanks and graph of volume  $V$  changes of cascade versus time

## 6. Wnioski

W artykule przedstawiono równania umożliwiające wyznaczenie zmian stężeń w czasie na wyjściu z pojedynczych zbiorników homogenicznych i kaskad zbiorników homogenicznych. Za pomocą tych równań można określić niezbędną pojemność urządzeń, która zapewni niezbędny stopień wy tłumienia oscylacji stężeń na ich wyjściu. Usytuowanie zbiorników na początku układu technologicznego umożliwia wy tłumienie oscylacji stężeń i/lub przepływów, co gwarantuje stabilizację pracy obiektów znajdujących się w dalszej części układu.

W podobny sposób można analizować przykładowo pracę reaktorów chemicznych lub biochemicznych instalowanych w ciągach technologicznych oczyszczalni ścieków. W takim jednak wypadku konieczne jest uwzględnienie szybkości reakcji chemicznej lub biochemicznej w równaniu bilansu masy.

W przypadku zmiennych w czasie stężeń i przepływów homogeniczne zbiorniki uśredniające i retencyjno-uśredniające wykazują podobne własności tłumiące oscylacje stężeń. Z dodatkowych obliczeń przeprowadzonych przez autora wynika, że kaskady homogenicznych zbiorników uśredniających i kaskady homogenicznych zbiorników retencyjno-uśredniających również wykazują podobne własności tłumiące oscylacje stężeń. Dla pewnych przypadków dynamiki zmian stężeń i czasów przebywania substancji w urządzeniu zbiornikowym, w celu wy tłumienia oscylacji stężeń na tym samym poziomie, wymagana pojemność kaskady zbiornikowej może być mniejsza od pojemności pojedynczego zbiornika homogenicznego. Tłumienie oscylacji stężeń przez kaskadę zbiornikową może być lepsze od tłumienia przez pojedynczy zbiornik homogeniczny o tej samej pojemności co kaskada. Ten sam efekt tłumienia oscylacji stężeń można, w niektórych sytuacjach, uzyskać dla dwóch różnych kaskad zbiornikowych.

Od chwili rozpoczęcia eksploatacji różnych urządzeń zbiornikowych czas potrzebny do uzyskania stabilizacji zmian stężeń na wyjściu jest również różny. Dla pojedynczych zbiorni-



ków homogenicznych czas ten jest dłuższy od czasu dla kaskad zbiornikowych. Możliwości zastosowań równania (37) nie są całkowicie poznane. Prowadzone będą dalsze badania mające na celu porównanie wyników obliczeń uzyskanych za pomocą równania (37) z wynikami obliczeń uzyskanymi z rozwiązania innych modeli transportu masy w stanach nieustalonych. W ogólnym przypadku efekty działania rzeczywistych zbiorników mogą być aproksymowane efektami działania pojedynczych zbiorników homogenicznych, kaskad zbiorników homogenicznych, zbiorników z przepływem tłokowym (nieskończona liczba elementów kaskady, adwekcyjny transport masy, układ opóźniający) lub ich kombinacji.

## Literatura

- [1] Metcalf and Eddy, *Wastewater engineering – treatment and reuse*, McGraw Hill 2004.
- [2] Bartoszewski K., Kempa E., Szpadt R., *Systemy oczyszczania ścieków – podstawy technologiczne i projektowanie*, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1981.
- [3] Szarawara J., Skrzypek J., *Basics of chemical reactors engineering*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1980.
- [4] Coulson J.M., Richardson J.F., Backhurst J.R., Harker J.H., *Chemical Engineering*, Elsevier, 1999.
- [5] Eagleson P.S., *Hydrologia dynamiczna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1978.
- [6] Sawicki J., *Przepływy ze swobodną powierzchnią*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.
- [7] Soczyńska U., *Hydrologia dynamiczna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997.
- [8] Iller E., *Badania znacznikowe w inżynierii procesowej*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1992.
- [9] Luyben W.L., *Process modeling, simulation, and control for chemical engineers*, McGraw Hill 1973.