

JAN ŁUCZKO, ANDRZEJ CZERWIŃSKI\*

## WPŁYW WARUNKÓW BRZEGOWYCH NA CZĘSTOŚCI WŁASNE I OBSZARY STABILNOŚCI PRZEWODÓW HYDRAULICZNYCH

### INFLUENCE OF BOUNDARY CONDITIONS ON THE NATURAL FREQUENCIES AND THE STABILITY REGIONS OF THE HYDRAULIC PIPES

#### Streszczenie

W pracy poddano analizie model opisujący drgania poprzeczne przewodu, wywołane pulsacjami prędkości przepływającej cieczy. Ruch układu opisano równaniem różniczkowym cząstkowym o okresowo zmiennych współczynnikach. Analizę przeprowadzono metodą Galerkin z wykorzystaniem wielomianów ortogonalnych jako funkcji kształtu. Do wyznaczenia obszarów niestabilnych zastosowano teorię Floqueta. Zbadano wpływ wybranych parametrów oraz warunków brzegowych na częstotliwości własne układu oraz na zakresy rezonansu parametrycznego.

*Słowa kluczowe: układy hydrauliczne, drgania wzbudzone przepływem, rezonans parametryczny*

#### Abstract

The paper is concerned with the analysis of a model describing the transverse vibrations induced by periodically variable fluid flow. Motion of the system was described by using partial differential equations with periodically variable coefficients. The analysis was performed by Galerkin method and orthogonal polynomials as shape functions. The instability regions were determined by Floquet theory. The influence of several parameters and boundary conditions on the natural frequencies and the instability regions were investigated.

*Keywords: hydraulic systems, flow-induced vibration, parametric resonance*

\* Dr hab. inż. Jan Łuczko, prof. PK, Instytut Mechaniki Stosowanej, mgr inż. Andrzej Czerwiński, Instytut Konstrukcji Maszyn, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

## 1. Wstęp

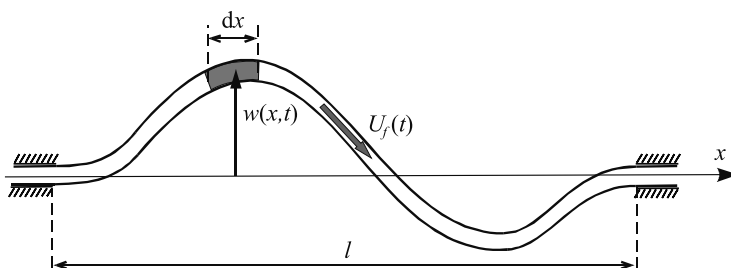
Drgania przewodów mogą być istotnym problemem w instalacjach przenoszących ciecz z dużymi prędkościami (np. w przemyśle naftowym, chemicznym, w energetyce wodnej, a także w przypadku układów hydrauliki siłowej). Gdy przez przewód zamocowany obustronnie przepływa ciecz ze stałą prędkością, może on utracić stabilność jedynie przez wyboczenie. Gdy prędkość przepływu zawiera składową okresowo zmienną, w pewnych warunkach mogą się w układzie wzbudzić drgania parametryczne [3, 4, 10–15]. Problem modelowania przewodów przenoszących ciecz oraz analizy otrzymanych równań ruchu był przedmiotem wielu prac naukowych [2, 5, 7, 10]. Badano drgania i stabilność przewodów o rozmaitym kształcie i sposobie zamocowania. Kompleksowy przegląd metod modelowania i analizy został przedstawiony w monografii [10]. Do numerycznego badania stabilności przewodów są wykorzystywane różne metody analizy matematycznej [4, 6, 8]. W pracy [3] autorzy rozważają przypadki rury obustronnie utwierdzonej oraz zamocowanej przegubowo, którą modelują za pomocą belki Eulera. Równania różniczkowe są rozwiązywane metodą Galerkina, granice obszarów niestabilnych określone są metodą uśredniania. Z kolei w pracach [6–8] autorzy badają zjawisko rezonansu parametrycznego rury zamocowanej przegubowo, wykorzystując metodę analizy wieloskalowej. W pracach [6, 7] granice stabilności są określone analitycznie. Autorzy pracy [11], analizując geometrycznie nieliniowe równanie drgań, wywołanych pulsacjami prędkości cieczy, wykazują zjawiska rezonansu parametrycznego, kombinowanego oraz wewnętrznego.

W niniejszej pracy poddano analizie przewód z przepływającą cieczą dla trzech różnych przypadków warunków brzegowych: obustronnego utwierdzenia, podparcia przegubowego z obu stron oraz utwierdzenia jednego końca przewodu i podparcia przegubowego drugiego jego końca. Celem pracy było zbadanie wpływu parametrów na częstości własne oraz zakresy stabilnych i niestabilnych rozwiązań. Drgania poprzeczne przewodu opisano równaniem różniczkowym cząstkowym o okresowo zmiennych współczynnikach, rozwiązaniem następnie metodą Galerkina. Jako funkcje kształtu przyjęto wielomiany ortogonalne. Obszary niestabilne wyznaczono numerycznie, wykorzystując teorię Floqueta [1]. W pracy przebadano wpływ prędkości przepływu, częstości i amplitudy pulsacji, ciśnienia na końcu przewodu, tłumienia wewnętrznego oraz tarcia pomiędzy cieczą a ściankami przewodu.

## 2. Model układu

Model badanego układu przedstawiono na rys. 1. Założono, że ciecz jest nieściśliwa, a prędkość przepływu  $U_f$  nie zależy od zmiennej  $x$  i jest stała w całym przekroju. Do opisu drgań poprzecznych przewodu o długości  $l$  wprowadzono współrzędną  $w(x, t)$ .

Układ sił działających na element cieczy o jednostkowej masie  $m_f$  oraz na element przewodu o masie  $m_p$  został pokazany na rys. 2. Uwzględniono siły poprzeczne  $Q$  i osiowe  $T$ , siły parcia  $pA$ , (gdzie:  $p$  – ciśnienie,  $A$  – powierzchnia pola przekroju wewnętrznego przewodu) oraz składowe normalne  $n$  i styczne  $\tau$  sił wewnętrznych w układzie rura–ciecz.



Rys. 1. Model układu

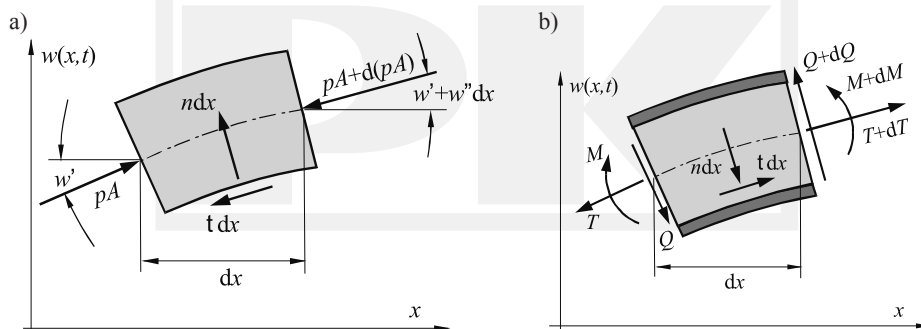
Fig. 1. Model of the system

Po uwzględnieniu wpływu sił osiowych oraz sił bezwładności wynikających z przepływu, drgania poprzeczne przewodu z cieczą opisuje następujące równanie [10]:

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + m_f \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} U_f^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} U_f + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial U_f}{\partial t} \right] + (pA - T) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

gdzie  $m = m_p + m_f$ . Dla modelu Voigta–Kelvina tłumienia wewnętrznego [3, 11, 13, 14] siłę poprzeczną określa wzór:

$$Q = -EI_p \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial t} \right] \quad (2)$$



Rys. 2. Oznaczenia sił: a) element cieczy, b) element przewodu

Fig. 2. Indication of forces: a) fluid element, b) pipe element

W celu wyznaczenia składnika  $(pA - T)$  należy przeanalizować składowe osiowe siły działające na element przewodu z cieczą. Po pominięciu wpływu drgań osiowych otrzymuje się proste równanie [10]:

$$\frac{\partial(pA - T)}{\partial x} = -m_f \frac{\partial U_f}{\partial t} \quad (3)$$

z którego, po scałkowaniu w granicach od dowolnego  $x$  do  $l$ , wynika następująca zależność:

$$pA - T = p(l, t)A - T(l, t) + m_f \frac{\partial U_f}{\partial t} (l - x) \quad (4)$$

Do określenia sił stycznych (przypadających na jednostkę długości) w układzie rura–ciecz najczęściej wykorzystuje się hipotezę Darcy–Weisbacha:

$$\tau = -\frac{\partial T}{\partial x} = m_f \frac{\lambda}{2d} U_f^2 \quad (5)$$

przy czym parametr  $d$  jest średnicą wewnętrzną przewodu, a  $\lambda$  jest bezwymiarowym współczynnikiem oporów przepływu, zależnym od liczby Reynoldsa:

$$\text{Re} = \frac{U_f d}{v_f} \quad (6)$$

gdzie  $v_f$  jest współczynnikiem lepkości kinematycznej. W zakresie  $\text{Re} < 2100$ – $2300$  jest wykorzystywana zależność:

$$\lambda = \frac{75}{\text{Re}} \quad (7)$$

natomiast w zakresie  $2300 < \text{Re} < 50\,000$  stosuje się uproszczony wzór Blasiusa, słuszny dla rur hydraulicznie gładkich:

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\text{Re}}} \quad (8)$$

Po scałkowaniu równania (5) w odpowiednich granicach otrzymuje się zależność:

$$T(x, t) = T(l, t) + m_f \frac{\lambda}{2d} U_f^2 (l - x) \quad (9)$$

Przyjmując dalej, że wartość średnia siły (9) jest równa wstępnemu naciągowi przewodu  $T_0$ , czyli:

$$T_0 = T(l, t) + m_f \frac{\lambda l}{4d} U_f^2 \quad (10)$$

oraz, że ciśnienie na końcu przewodu  $p(l, t) = p_0$  nie zależy od czasu, równanie (1) można, po wykorzystaniu związków (2), (4) i (10), sprowadzić do postaci:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + m_f \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} U_f^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} U_f \right] + EI_p \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \right] + \\ + \left[ (p_0 A - T_0) + m_f \frac{\lambda l}{4d} U_f^2 + m_f \frac{\partial U_f}{\partial t} (l - x) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

W pracach dotyczących podobnych zagadnień wprowadza się zmienne bezwymiarowe, odnosząc najczęściej przemieszczenia do długości przewodu  $l$ :

$$z(\xi, \tau) = w(x, t)/l \quad \xi = x/l \quad (12)$$

Bezwymiarowy czas jest definiowany związkiem:  $\tau = \omega_0 t$ , gdzie:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{EI_p}{ml^4}} \quad (13)$$

jest częstością podstawową drgań giętych rury, wypełnionej nieruchomą cieczą. Równanie (11) w zmiennych bezwymiarowych ma postać:

$$\ddot{z} + 2\beta U \dot{z}' + [\sigma - q + (1 + \gamma)U^2 + \beta \dot{U}(1 - \xi)] z'' + z^{IV} + \zeta z^{IV} = 0 \quad (14)$$

przy czym kropką oznaczono pochodne względem zmiennej  $\tau$ , a primem względem  $\xi$ .

Bezwymiarowa prędkość przepływu jest zdefiniowana następująco:

$$U = \frac{\beta U_f}{\omega_0 l} \quad (15)$$

W prowadzonych dalej obliczeniach założono harmoniczną zmianę prędkości:

$$U = U_0(1 + A_U \sin \omega \tau) \quad (16)$$

gdzie  $U_0$  jest wartością średnią prędkości, a  $A_U$  i  $\omega$  są amplitudą i częstością pulsacji. Występujące w równaniu (14) parametry są zdefiniowane wzorami:

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{\frac{m_f}{m}} & \sigma &= \frac{p_0 A l^2}{EI_p} & q &= \frac{T_0 l^2}{EI_p} \\ \nu &= \frac{\nu_f}{\omega_0 l^2} & \gamma &= \frac{\lambda l}{4d} & \zeta &= \alpha \cdot \omega_0 \end{aligned} \quad (17)$$

### 3. Metoda Galerkina

Analizując równanie (14), można określić zależność częstości własnych od parametrów, charakteryzujących zarówno przewód, jak i przepływającą ciecz, oraz wyznaczyć obszary stabilnych i niestabilnych rozwiązań. Do analizy wykorzystano dalej metodę Galerkina, zakładając rozwiązanie przybliżone w postaci:

$$z(\tau, \xi) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(\xi) z_j(\tau) \quad (18)$$

Funkcje aproksymujące  $\varphi_j(\xi)$  powinny spełniać warunki brzegowe oraz tworzyć układ zupełny funkcji. Dla przegubowego podparcia obu końców przewodu mogą to być funkcje trygonometryczne. W przypadku innych warunków brzegowych, a zwłaszcza podczas analizy zagadnień nieliniowych, zastosowanie jako funkcji kształtu funkcji własnych odpowiedniego zagadnienia liniowego, może natrafiać na znaczne trudności natury rachunkowej. Wygodniejsze w zastosowaniach są wtedy funkcje wielomianowe. Problem doboru takich funkcji zostanie omówiony w następnym punkcie. Po wstawieniu założonej postaci rozwiązania (18) do równania (14) otrzymuje się równanie:

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j \ddot{z}_j + [2\beta U \varphi_j' + \zeta \varphi_j^{IV}] \dot{z}_j + [(\sigma - q + (1 + \gamma)U^2 + \beta \dot{U}(1 - \xi)) \varphi_j'' + \varphi_j^{IV}] z_j = 0 \quad (19)$$

W metodzie Galerkina należy pomnożyć równanie (19) przez kolejne funkcje kształtu  $\varphi_k(\xi)$ , ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), a następnie scałkować uzyskane równania w odpowiednich granicach. Po wykorzystaniu warunków ortogonalności:

$$\int_0^1 \varphi_j(\xi) \varphi_k(\xi) d\xi = \delta_{jk} \quad (20)$$

gdzie  $\delta_{jk}$  jest deltą Kroneckera, ruch układu opisuje układ równań różniczkowych zwyczajnych o następującej postaci:

$$\ddot{z}_k(\tau) + \sum_{j=1}^N [B_{kj} \dot{z}_j(\tau) + C_{kj} z_j(\tau)] = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

Występujące w równaniach (21) współczynniki wyrażają się wzorami:

$$B_{kj} = \int_0^1 [2\beta U \varphi_j'(\xi) + \zeta \varphi_j^{IV}(\xi)] \varphi_k(\xi) d\xi \quad (22)$$

$$C_{kj} = \int_0^1 [(\sigma - q + (1 + \gamma)U^2 + \beta \dot{U}(1 - \xi)) \varphi_j''(\xi) + \varphi_j^{IV}(\xi)] \varphi_k(\xi) d\xi \quad (23)$$

Równania (21) w zapisie macierzowym można przedstawić następująco:

$$\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (24)$$

przy czym macierz  $\mathbf{C}$  jest macierzą sztywności, a macierz  $\mathbf{B}$  jest sumą macierzy symetrycznej, odpowiedzialnej za rozpraszanie energii (we wzorze (22) składnik ze współczynnikiem  $\zeta$ ) oraz macierzy antysymetrycznej, uwzględniającej wpływ efektów żyroskopowych (składnik zależny od prędkości  $U$ , reprezentujący siły Coriolisa). Równanie (24) jest równaniem liniowym o zmiennych współczynnikach z uwagi na zależność prędkości przepływu  $U$  od czasu.

#### 4. Funkcje kształtu

W celu skonstruowania wielomianowych funkcji aproksymujących buduje się najpierw liniowo niezależne funkcje  $\phi_1(\xi)$ ,  $\phi_2(\xi)$ , ...,  $\phi_N(\xi)$ , spełniające zadane warunki brzegowe w przedziale  $(0, 1)$ . Można założyć następującą postać wielomianową tych funkcji:

$$\phi_j(\xi) = a_{0j} + a_{1j}\xi + a_{2j}\xi^2 + \dots + a_{j+3,j}\xi^{j+3} = \sum_{k=0}^{j+3} a_{kj}\xi^k \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (25)$$

Funkcje opisujące przemieszczenia poprzeczne muszą spełniać cztery warunki brzegowe, po dwa na każdym końcu przewodu (dla  $\xi = 0$  i  $\xi = 1$ ). Po ich wykorzystaniu można dla dowolnie przyjętych wartości parametrów  $a_{4j}$ ,  $a_{5j}$ , ...,  $a_{nj}$ , gdzie  $n = j + 3$  (np. równych jedności), wyznaczyć cztery pierwsze współczynniki  $a_{0j}$ ,  $a_{1j}$ ,  $a_{2j}$ ,  $a_{3j}$  rozwiązania (25). W formie przykładu rozważmy pręt utwierdzony z lewej strony i podparty przegubowo na prawym końcu. Funkcje  $\phi_j(\xi)$  powinny spełniać następujące warunki brzegowe:

$$\phi_j(0) = \phi_j'(0) = \phi_j(1) = \phi_j''(1) = 0 \quad (26)$$

Z warunków dla  $\xi = 0$  otrzymamy  $a_{0j} = a_{1j} = 0$ . Z pozostałych warunków (dla  $\xi = 1$ ) wynikają dwa równania:

$$\begin{aligned} a_{2j} + a_{3j} &= -\sum_{k=4}^{j+3} a_{kj} \\ 2a_{2j} + 6a_{3j} &= -\sum_{k=4}^{j+3} k(k-1)a_{kj} \end{aligned} \quad (27)$$

określające współczynniki  $a_{2j}$  i  $a_{3j}$  wielomianu stopnia  $j + 3$ . Przy założeniu  $a_{kj} = 1$  dla  $4 \leq k \leq j + 3$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) pierwsze trzy wielomiany mają następującą postać:

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &= (1, 5 - 2, 5\xi + \xi^2)\xi^2 \\ \phi_2(\xi) &= (5 - 7\xi + \xi^2 + \xi^3)\xi^2 \\ \phi_3(\xi) &= (11 - 14\xi + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4)\xi^2 \end{aligned} \quad (28)$$

Wyznaczone w ten sposób wielomiany nie są ortogonalne. W celu skonstruowania bazy wielomianów ortonormalnych  $\varphi_1(\xi)$ ,  $\varphi_2(\xi)$ , ...,  $\varphi_N(\xi)$  wykorzystuje się najczęściej metodę ortogonalizacji Grama-Schmidta. Po zdefiniowaniu iloczynu skalarnego dwóch funkcji:

$$(\varphi, \phi) = \int_0^1 \varphi(\xi)\phi(\xi)d\xi \quad (29)$$

oraz po przyjęciu dla normy funkcji oznaczenia:

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} = \sqrt{\int_0^1 \varphi^2(\xi) d\xi} \quad (30)$$

pierwszy wielomian można wyznaczyć ze wzoru:

$$\varphi_1(\xi) = \frac{\phi_1(\xi)}{\|\phi_1\|} \quad (31)$$

Kolejne wielomiany określa wzór rekurencyjny:

$$\varphi_j(\xi) = \frac{\vartheta_j(\xi)}{\|\vartheta_j\|} \quad (32)$$

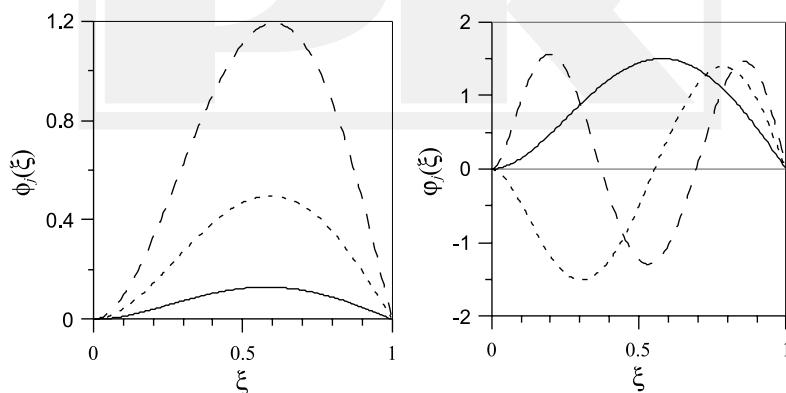
przy czym:

$$\vartheta_j(\xi) = \phi_j(\xi) - \sum_{k=1}^{j-1} (\phi_j, \varphi_k) \varphi_k(\xi) \quad (33)$$

W rozważanym przypadku trzy pierwsze wielomiany ortonormalne określają wzory:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= 17,2749\xi^2 - 28,7914\xi^3 + 11,5166\xi^4 \\ \varphi_2(\xi) &= -68,8591\xi^2 + 248,952\xi^3 - 280,733\xi^4 + 100,640\xi^5 \\ \varphi_3(\xi) &= 179,412\xi^2 - 1077,53\xi^3 + 2241,06\xi^4 - 1950,17\xi^5 + 607,240\xi^6 \end{aligned} \quad (34)$$

Na rysunku 3 pokazano wykresy pierwszych trzech wielomianów  $\phi_j(\xi)$  i skonstruowanych na ich podstawie metodą Grama–Schmidta wielomianów ortonormalnych  $\varphi_j(\xi)$ .



Rys. 3. Wielomiany tworzące i ortonormalne

Fig. 3. Generator and orthonormal polynomials



Dla obustronnego podparcia przegubowego odpowiednie funkcje kształtu mają postać:

$$\begin{aligned}\varphi_1(\xi) &= 4,50806\xi - 9,01611\xi^3 + 4,50806\xi^4 \\ \varphi_2(\xi) &= -9,61249\xi + 96,1249\xi^3 - 144,187\xi^4 + 57,6750\xi^5 \\ \varphi_3(\xi) &= 15,9929\xi - 435,955\xi^3 + 1227,90\xi^4 - 1211,91\xi^5 + 403,969\xi^6\end{aligned}\quad (35)$$

Dla obustronnego utwierdzenia zostaną wykorzystane wzory:

$$\begin{aligned}\varphi_1(\xi) &= 25,0998\xi^2 - 50,1996\xi^3 + 25,0998\xi^4 \\ \varphi_2(\xi) &= -83,2466\xi^2 + 332,986\xi^3 - 416,233\xi^4 + 166,493\xi^5 \\ \varphi_3(\xi) &= 202,361\xi^2 - 1295,11\xi^3 + 2873,53\xi^4 - 2671,17\xi^5 + 890,389\xi^6\end{aligned}\quad (36)$$

## 5. Obszary stabilności

Przy stosowaniu metod numerycznych wyznaczania oraz badania stabilności rozwiązań równanie (24) sprowadza się do postaci:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{v} \quad (37)$$

gdzie:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{C} & -\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (38)$$

Wykorzystując procedury numeryczne do rozwiązywania zagadnienia własnego, można wyznaczyć wartości własne macierzy  $\mathbf{A}$ . Części urojone wartości własnych określają częstości własne, natomiast na podstawie znaku części rzeczywistych można wnioskować odnośnie do stabilności rozwiązań.

Ponieważ równanie (37) jest równaniem liniowym o okresowo zmiennych współczynnikach (o okresie  $T = 2\pi/\omega$ ), do wyznaczenia obszarów stabilnych rozwiązań można wykorzystać teorię Floqueta [1]. W tym celu należy pomocniczo wyznaczyć macierz monodromii  $\mathbf{M} = \mathbf{F}(T)$ , zdefiniowaną przez macierz fundamentalną  $\mathbf{F}$  (matrycant), spełniającą macierzowe równanie różniczkowe:

$$\frac{d\mathbf{F}}{d\tau} = \mathbf{A}\mathbf{F} \quad (39)$$

oraz następujące warunki początkowe:

$$\mathbf{F}(0) = \mathbf{I} \quad (40)$$

Wartości własne  $\mu_k$  macierzy monodromii, nazywane mnożnikami charakterystycznymi Floqueta, decydują o stabilności rozwiązań okresowych. Jeśli choć jeden mnożnik spełnia nierówność  $|\mu_k| > 1$ , to rozwiązanie jest niestabilne. Mnożniki Floqueta wyznacza się, rozwiązując zagadnienie własne:

$$(\mathbf{M} - \mu\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (41)$$

Badając warunek  $|\mu_k| > 1$  można wyznaczyć niestabilne obszary w przestrzeni wybranych parametrów układu.

## 6. Rezultaty analiz numerycznych

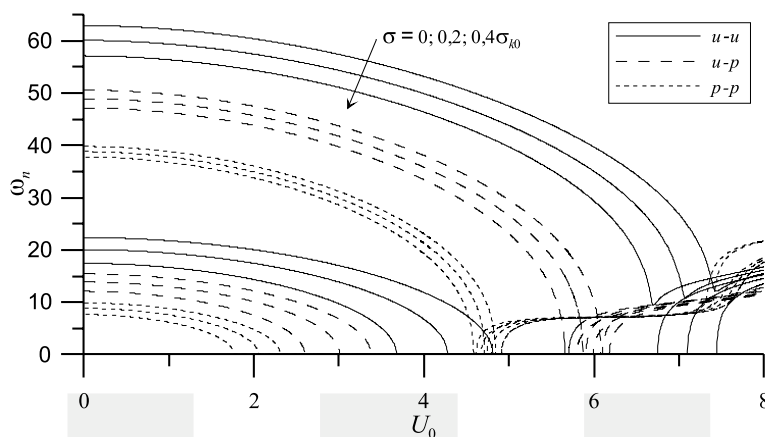
Wzory (21–24) oraz (34–41) stanowią podstawę algorytmu obliczeń numerycznych do wyznaczania częstości własnych oraz obszarów niestabilności. Podczas badania wpływu parametrów układu na stabilność rozwiązań obliczenie elementów macierzy monodromii wymaga wielokrotnego numerycznego całkowania równania macierzowego (39). W celu zapewnienia dostatecznej dokładności, a także minimalizacji czasu obliczeń, wskazane jest wykorzystanie wzorów analitycznych, określających elementy (22) i (23) macierzy  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{C}$ . W pracy wzory takie uzyskano za pomocą pakietu Maple 9. W programie, sporządzonym w języku Fortran, wykorzystano procedury z biblioteki IMSL do całkowania numerycznego (metody Runge–Kutty–Vernera 5-go i 6-go rzędu oraz metody Adamsa i Geara) oraz rozwiązywania zagadnienia własnego (algorytm QR zastosowany do postaci Hessenberga macierzy  $\mathbf{A}$ ).

Obliczenia numeryczne wykonano dla trzech typów zamocowania końców przewodu: przegub-przegub ( $p-p$ ), utwierdzenie-przegub ( $u-p$ ) oraz utwierdzenie-utwierdzenie ( $u-u$ ). Wyznaczając częstości drgań własnych, założono stałą wartość prędkości przepływu, czyli pominięto tu wpływ amplitudy pulsacji prędkości. Można też wyznaczać chwilowe wartości częstości, rozwiązując zagadnienie własne dla wybranych punktów czasowych w okresie wymuszenia. Wyznaczone w ten sposób częstości oscylują wokół obliczonych dla stałej prędkości przepływu. Zakres ich zmian zwiększa się ze wzrostem amplitudy pulsacji, co powoduje zwiększanie zakresów rezonansu parametrycznego. Zakresy te, wyznaczone dalej metodą Floqueta, uwzględniają już zależność (16) prędkości przepływu od czasu.

Największy wpływ na częstości drgań własnych mają bezwymiarowe parametry  $U_0$  i  $\sigma$ , związane ze średnią prędkością przepływu i ciśnieniem na końcu przewodu. Ze wzrostem zarówno prędkości  $U_0$ , jak i ciśnienia  $\sigma$  maleją częstości drgań własnych. Zmniejszanie częstości ze wzrostem prędkości jest tu efektem działania siły odśrodkowej bezwładności (w równaniu (14) składnik  $U_2 z''$ ), działającej przeciwnie do sił sprężystości. Wzrost ciśnienia powoduje powstanie siły ściskającej, również powodującej zmniejszanie się częstości drgań własnych.

Wpływ parametrów  $U_0$  i  $\sigma$  na dwie pierwsze częstości ilustrują krzywe przedstawione na rys. 4. Wykresy sporządzono dla rozważanych w pracy warunków brzegowych, uwzględniając opory przepływu (przyjęto  $\nu = 2 \times 10^{-6}$ ). Dla ustalonych wartości parametru  $\sigma$ , zmieniano dostatecznie gęsto wartość parametru  $U_0$ .

Najsilniej maleje częstość podstawowa układu i może ona osiągnąć wartość zerową dla dostatecznie dużych wartości parametru  $U_0$  i  $\sigma$ , nazywanych dalej wartościami krytycznymi  $U_k$  i  $\sigma_k$ . Dla wartości większych od wartości krytycznych układ traci stabilność przez wyboczenie (dywergencję). Wartość krytyczna  $U_k$  zależy od wartości ciśnienia i odwrotnie – na wartość  $\sigma_k$  ma wpływ prędkość przepływu.



Rys. 4. Wpływ prędkości przepływu  $U_0$  oraz ciśnienia  $\sigma$  na częstości  $\omega_1$  i  $\omega_2$  dla trzech typów zamocowania przewodu ( $\beta = 0,5$ ,  $d/l = 0,008$ ,  $\zeta = 0,001$ )

Fig. 4. The influence of flow velocity  $U_0$  and pressure  $\sigma$  on the frequencies  $\omega_1$  and  $\omega_2$  for different types of pipe support ( $\beta = 0.5$ ,  $d/l = 0.008$ ,  $\zeta = 0.001$ )

Tabela 1

**Wartości parametrów krytycznych dla różnych warunków brzegowych**

| Parametr                          | Typ zamocowania |                      |                           |
|-----------------------------------|-----------------|----------------------|---------------------------|
|                                   | przegub–przegub | utwierdzenie–przegub | utwierdzenie–utwierdzenie |
| Częstość własna $\omega_{10}$     | $\pi^2$         | 15,415               | 22,373                    |
| Prędkość krytyczna $U_{k0}$       | $\pi$           | 4,492                | $2 \cdot \pi$             |
| Ciśnienie krytyczne $\sigma_{k0}$ | $\pi^2$         | $2 \cdot \pi^2$      | $4 \cdot \pi^2$           |

W tabeli 1 podano wartości krytyczne:  $U_{k0}$  ( $U_k$  dla  $\sigma = 0$  i  $\nu = 0$ ) [10],  $\sigma_{k0}$  (dla  $U_0 = 0$  i  $\nu = 0$ ) oraz wartości częstości podstawowej  $\omega_{10}$  (dla  $U_0 = 0$ ,  $\sigma = 0$  i  $\nu = 0$ ), obliczone dla różnych typów warunków brzegowych. Parametry  $\sigma_{k0}$  i  $\omega_{10}$  są określone wzorami analitycznymi, przy czym pierwszy z nich może być interpretowany jako bezwymiarowa siła Eulera, powodująca wyobczenie pręta. Zmiana sposobu zamocowania przewodu z przegubowego na utwierdzenie powoduje wzrost wartości częstości podstawowej oraz obu wartości krytycznych.

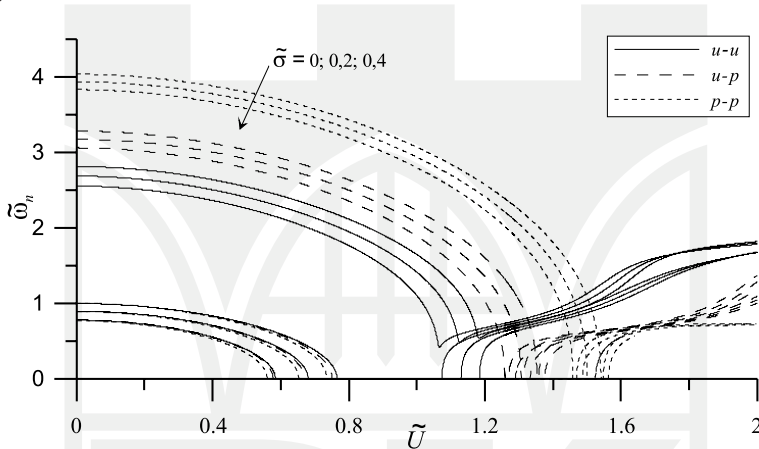
W zakresie prędkości większych od krytycznej pokazane na rys. 4 wykresy częstości mają interesujące przebiegi. Układ liniowy w tym zakresie jest niestabilny, jednak po uwzględnieniu nieliniowości, np. geometrycznych, również w tym zakresie są możliwe drgania o ograniczonych amplitudach.

W celu zorientowania się, jakie formy drgań odpowiadają kolejnym częstościom, należy przeanalizować współrzędne odpowiednich wektorów własnych. W ogólnym przypadku, przy uwzględnieniu wpływu tłumienia, zarówno wartości własne, jak i współrzędne wektorów są liczbami zespolonymi, najczęściej parami sprzężonymi. Moduły współrzędnych wektora własnego informują o amplitudach przemieszczeń  $z_j$  i prędkości  $\dot{z}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ ) z wybraną

częstością  $\omega_k$ . Okazuje się, że w zakresie prędkości podkrytycznych częstości  $\omega_k$  odpowiada wektor z dominującą współrzędną  $z_k$ , czyli kolejnym częstościom odpowiadają kolejne formy drgań. W zakresie nadkrytycznym forma drgań jest bardziej złożona i jest ona przeważnie kombinacją pierwszej i drugiej formy drgań.

Przykładowo, dla podparcia przegubowego ( $\sigma = 0,2\sigma_{k0}$ ) w zakresie podkrytycznym (dla  $U_0 = 0,5U_{k0}$ ) częstości podstawowej  $\omega_1$  odpowiadają następujące współczynniki charakteryzujące przemieszczenia: 0,978, 0,018 i 0,004, natomiast w zakresie nadkrytycznym (dla  $U_0 = 1,5U_{k0}$ ) wartości odpowiednich współczynników są równe: 0,46, 0,514 i 0,026.

Obserwując wykresy częstości, można zauważyć duży wpływ sposobu zamocowania na wartości parametrów krytycznych (prędkości i ciśnienia) oraz na wartość częstości podstawowej. Sytuacja ulega zmianie po odniesieniu prędkości, ciśnienia oraz częstości do wartości podanych w tabeli 1.



Rys. 5. Wpływ prędkości przepływu  $\tilde{U}$  oraz ciśnienia  $\tilde{\sigma}$  na częstości własne  $\tilde{\omega}_1$  i  $\tilde{\omega}_2$  układu dla trzech typów zamocowania przewodu ( $\beta = 0,5$ ,  $d/l = 0,008$ ,  $\zeta = 0,001$ )

Fig. 5. The influence of flow velocity  $\tilde{U}$  and pressure  $\tilde{\sigma}$  on the frequencies  $\tilde{\omega}_1$  and  $\tilde{\omega}_2$  for different types of pipe support ( $\beta = 0.5$ ,  $d/l = 0.008$ ,  $\zeta = 0.001$ )

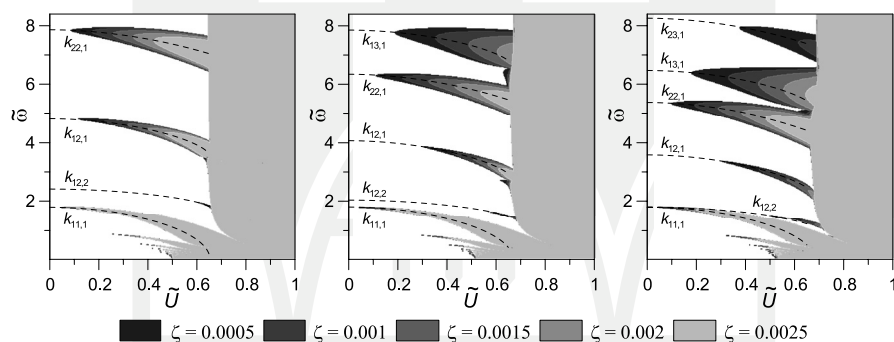
Na rys. 5 zostały przedstawione wykresy, odpowiadające pokazanym na rysunku 4, ilustrujące wpływ parametrów:  $\tilde{U} = U_0/U_{k0}$  (prędkości) i  $\tilde{\sigma} = \sigma/\sigma_{k0}$  (ciśnienia) na zmienne  $\tilde{\omega}_n = \omega_n/\omega_{10}$  (częstości). Przy takim sposobie prezentacji rezultatów analizy wartość parametru  $\tilde{\omega}_1$ , związanego z częstością podstawową, w małym stopniu zależy od sposobu zamocowania końców przewodu. Tylko dla prędkości zbliżonych do wartości krytycznych uwiadczenia się niewielki wpływ warunków brzegowych na parametr  $\tilde{\omega}_1$ . Sposób zamocowania końców przewodu decyduje o wartościach parametru  $\tilde{\omega}_2$  (a także  $\tilde{\omega}_3$ ), charakteryzujących rozkład kolejnych częstości własnych.

W dalszej analizie wpływu parametrów układu na obszary stabilności wykorzystano wprowadzone parametry:  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{\sigma}$ ,  $\tilde{\omega}_n$  oraz parametr  $\tilde{\omega} = \omega/\omega_{10}$  określający stosunek częstości wymuszenia do częstości podstawowej.

Na rys. 6 przedstawiono obszary niestabilnych rozwiązań na płaszczyźnie  $\tilde{\omega}-\tilde{U}$ . Wykresy sporządzono dla różnych wartości współczynnika tłumienia wewnętrznego

( $\zeta = 0,0005 \div 0,0025$ ) z uwzględnieniem oporów przepływu (przyjęto  $\nu = 2 \times 10^{-6}$ ), zakładając różne sposoby zamocowania końców przewodu. Wprowadzono dostatecznie gęsty równomierny podział płaszczyzny parametrów (najczęściej  $400 \times 400$  punktów). W zaciemnionych obszarach (kolor najciemniejszy dla  $\zeta = 0,0005$ , kolor najjaśniejszy dla  $\zeta = 0,0025$ ) rozwiązania równania różniczkowego (14) są niestabilne. Gładkość krzywych ograniczających obszary niestabilności dobrze świadczy o dokładności zastosowanych metod.

Dodatkowo naniesiono wykresy  $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_n + \tilde{\omega}_m) / l$  ( $n, m = 1, 2, 3; l = 1, 2, \dots$ ) dla wybranych wartości  $n, m, l$  (krzywe  $k_{nm,l}$ ), określające zależność częstości wymuszenia od kombinacji częstości drgań własnych. Przebieg krzywych  $k_{nm,l}$  zależy od bezwymiarowej prędkości przepływu  $\tilde{U}$ . Dla częstości wymuszenia, spełniającej podane wyżej związki powinno zachodzić zjawisko rezonansu parametrycznego [9, 12]. Przykładowo, dla  $n = m = l = 1$  mamy do czynienia z rezonansem podstawowym ( $\tilde{\omega} = 2\tilde{\omega}_1$  – krzywa  $k_{11,1}$ ), a dla  $n = l = 1, m = 2$  z podstawowym rezonansem kombinowanym ( $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2$  – krzywa  $k_{12,1}$ ).



Rys. 6. Wpływ tłumienia wewnętrznego na niestabilne obszary; płaszczyzna  $\tilde{U} - \tilde{\omega}$  ( $\tilde{\sigma} = 0,2$ ,  $A_U = 0,3$ ,  $\beta = 0,5$ ): a) przegubowe podparcie, b) utwierdzenie-przegub, c) obustronne utwierdzenie

Fig. 6. The influence of internal damping on the instability regions; plane  $\tilde{U} - \tilde{\omega}$  ( $\tilde{\sigma} = 0.2$ ,  $A_U = 0.3$ ,  $\beta = 0.5$ ): a) pinned – pinned, b) clamped – pinned, c) clamped – clamped

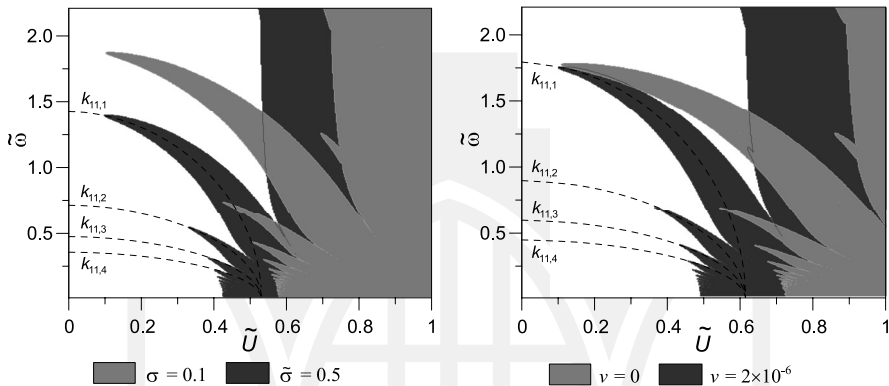
Analizując rezultaty, pokazane na rys. 6, można stwierdzić duże podobieństwa (niezależne od sposobu zamocowania) w występowaniu obszarów rezonansów parametrycznych, zwłaszcza dla mniejszych wartości częstości wymuszenia. Pewne różnice ilościowe wynikają tu z różnego rozkładu częstości własnych (rys. 5).

W zakresie wyższych częstości najbardziej złożoną strukturę mają obszary niestabilne w przypadku obustronnego utwierdzenia (rys. 6c), co częściowo wynika z faktu, że dla tego typu zamocowania różnice między bezwymiarowymi częstościami  $\tilde{\omega}_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) dla prędkości podkrytycznych są najmniejsze (rys. 5). W tym zakresie są widoczne trzy stosunkowo szerokie obszary rezonansów parametrycznych. Pierwszy obszar można interpretować jako podstawowy rezonans parametryczny związany z drugą częstością drgań własnych (w pobliżu krzywej  $k_{22,1}$ ), w następnych kombinowanych rezonansach uwidacznia się wpływ trzeciej częstości (krzywe  $k_{13,1}$  i  $k_{23,1}$ ).

Ze wzrostem tłumienia wewnętrznego omawiane obszary wyraźnie się zmniejszają w przeciwieństwie do obszarów leżących w zakresie niższych częstości. Z tego powodu – z punktu

widzenia praktycznego – ważniejszy jest zakres rezonansu podstawowego oraz rezonansów typu  $\tilde{\omega} = 2\tilde{\omega}_1 / l$ . Tutaj wyniki badania stabilności w bardzo małym stopniu zależą od warunków brzegowych, co jest efektem wprowadzenia nowych zmiennych  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{\sigma}$  i  $\tilde{\omega}$ . Analizując dokładniej ten zakres częstości, można się zatem ograniczyć do pokazania rezultatów dla jednego typu warunków brzegowych, przykładowo dla przewodu utwierdzonego z obu stron.

Na rys. 7 pokazano obszary niestabilne dla przypadku przewodu utwierdzonego obustronnie, ilustrujące jednocześnie wpływ ciśnienia na końcu przewodu (rys. 7a) oraz wpływ oporów przepływu (rys. 7b). Ograniczono się do prezentacji rezonansów parametrycznych związanych z częstością podstawową układu.



Rys. 7. Obszary niestabilności; płaszczyzna  $\tilde{U} - \tilde{\omega}$  ( $A_U = 0,25$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\zeta = 0,001$ ): a) wpływ ciśnienia ( $\nu = 2 \times 10^{-6}$ ); b) wpływ oporów przepływu ( $\tilde{\sigma} = 0,2$ )

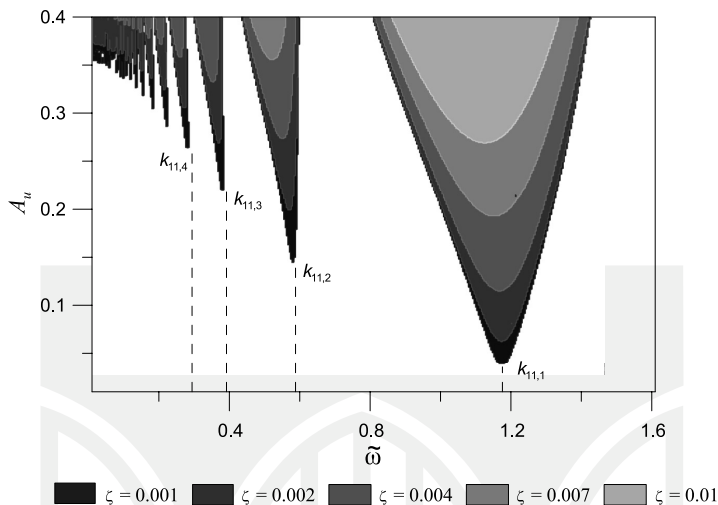
Fig. 7. The instability regions; plane  $\tilde{U} - \tilde{\omega}$  ( $A_U = 0,25$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\zeta = 0,001$ ): a) influence of pressure ( $\nu = 2 \times 10^{-6}$ ); b) influence of flow resistance ( $\tilde{\sigma} = 0,2$ )

Obszary niestabilne, wyznaczone w oparciu o analizę wartości mnożników Floqueta, otaczają tu krzywe  $\tilde{\omega} = 2\tilde{\omega}_l / l$  ( $l = 1, 2, 3, \dots$ ). Ze wzrostem ciśnienia (obszar ciemniejszy) rezonans parametryczny zachodzi dla niższych częstości (ponieważ częstość podstawowa maleje), a utrata stabilności przez wyboczenie ma miejsce dla mniejszych prędkości przepływu (prędkość krytyczna maleje). Obszary niestabilne poszerzają się ze wzrostem średniej prędkości przepływu  $\tilde{U}$ .

Wpływ oporów przepływu jest zbliżony do omawianego wcześniej wpływu ciśnienia. Tylko dla małych prędkości przepływu parametr  $\gamma$ , zależny od współczynnika lepkości  $\nu$ , w mniejszym stopniu wpływa na częstość podstawową układu i w związku z tym na podstawowy rezonans parametryczny. Te pewne analogie wynikają z przyjętej hipotezy, dotyczącej stałości ciśnienia na końcu przewodu. Przy uwzględnieniu wpływu lepkości cieczy jest wymagane odpowiednio wyższe ciśnienie na początku przewodu.

Wykresy, pokazane na rys. 8, ilustrują wpływ tłumienia wewnętrznego w przewodzie na obszary niestabilności w przestrzeni parametrów: częstość  $\tilde{\omega}$  i amplituda pulsacji  $A_U$ . Obliczenia przeprowadzono dla:  $\tilde{U} = 0,5$ ,  $\tilde{\sigma} = 0,2$ ,  $\nu = 2 \times 10^{-6}$  oraz następujących wartości współczynnika tłumienia wewnętrznego:  $\zeta = 0,001, 0,002, 0,004, 0,007, 0,01$ . Liniami przerywanymi zaznaczono, jak na poprzednich rysunkach, przewidywane wartości częstości rezonansowych. Na rysunku widoczne są zakresy kolejnych rezonansów parametrycznych, a rezonanse o niż-

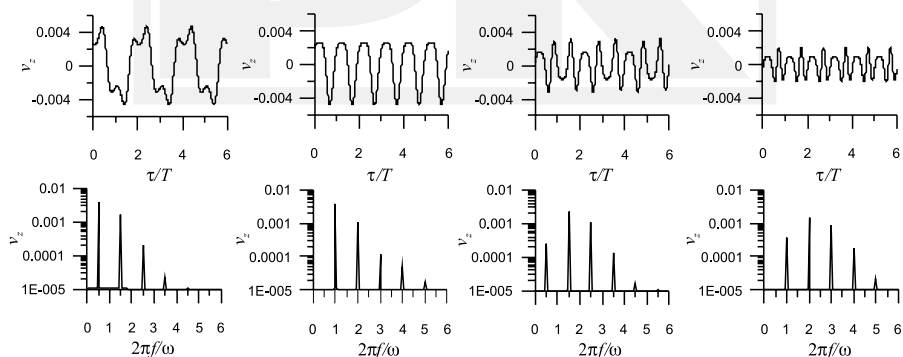
szych częstotliwościach uwidaczniają się przy coraz większych amplitudach pulsacji. Zwiększenie tłumienia wewnętrznego zmniejsza obszary niestabilnych rozwiązań, przy czym drgania rezonansowe są możliwe tylko dla dostatecznie dużych amplitud pulsacji prędkości przepływu.



Rys. 8. Wpływ tłumienia wewnętrznego na obszary niestabilności; płaszczyzna  $\tilde{\omega} - A_U$

Fig. 8. The influence of internal damping on the instability regions; plane  $\tilde{\omega} - A_U$

Z analizy modelu liniowego wynika, że z rozwiązaniami okresowymi można mieć do czynienia tylko na granicach obszarów stabilności. W zakresach stabilnych drgania zanikają, a w niestabilnych narastają one w sposób nieograniczony. W celu zbadania charakteru drgań można zatem analizować tylko rozwiązania odpowiadające punktom leżącym na granicach wyznaczonych obszarów.



Rys. 9. Przebiegi czasowe i widma ( $\tilde{U} = 0,5$ ,  $\tilde{\sigma} = 0,2$ ,  $A_U = 0,3$ ,  $\zeta = 0,001$ ): a)  $\tilde{\omega} = 1,38004$ , b)  $\tilde{\omega} = 0,59164$ , c)  $\tilde{\omega} = 0,377847$ , d)  $\tilde{\omega} = 0,277576$

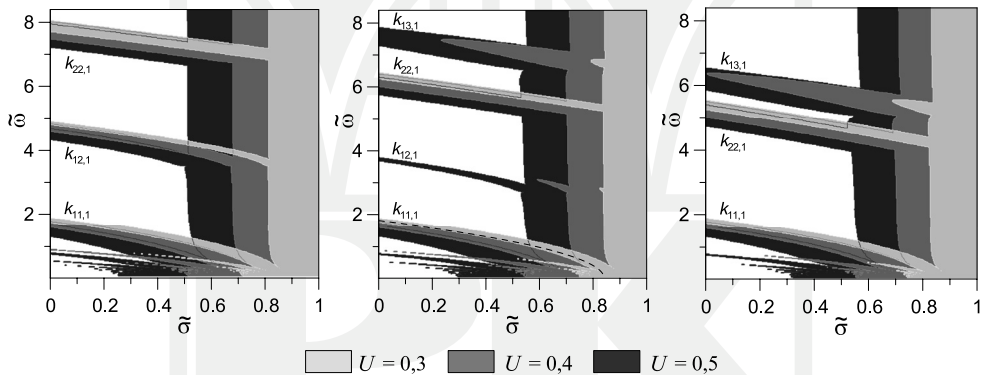
Fig. 9. Time histories and spectra ( $\tilde{U} = 0.5$ ,  $\tilde{\sigma} = 0.2$ ,  $A_U = 0.3$ ,  $\zeta = 0.001$ ): a)  $\tilde{\omega} = 1.38004$ , b)  $\tilde{\omega} = 0.59164$ , c)  $\tilde{\omega} = 0.377847$ , d)  $\tilde{\omega} = 0.277576$

Na rys. 9 przedstawiono rezultaty takich analiz (przebiegi czasowe oraz widma) w czterech wybranych punktach przecięcia prostej poziomej  $A_U = 0,3$  z granicami obszarów pokazanych na rysunku 8. Ustalono wartości następujących parametrów:  $\tilde{U} = 0,5$ ,  $\tilde{\sigma} = 0,2$ ,  $\zeta = 0,001$ , zmieniając tylko częstość pulsacji prędkości. W celu wyznaczenia przebiegów czasowych całkowano numerycznie równanie (24) metodą Runge-Kutty ze zmiennym krokiem, natomiast widma uzyskano, wykorzystując dodatkowo algorytmy FFT. Wykresy sporządzono dla prędkości  $v_z$ , obliczonej w punkcie oddalonym o  $1/4$  długości przewodu od punktu jego zamocowania z uwagi na fakt, że w punkcie tym uwidacznia się wpływ wszystkich badanych form drgań (czyli zmiennych  $z_1$ ,  $z_2$  i  $z_3$ ).

Drgania na granicy podstawowego rezonansu parametrycznego (rys. 9a) mają charakter drgań podharmonicznych drugiego rzędu, tzn. częstość drgań jest równa połowie częstości wymuszenia. Interesującym jest tu fakt, że w sygnale obserwuje się tylko nieparzyste harmoniczne (odległość między pikami widma jest równa częstości pulsacji).

W kolejnym punkcie, leżącym na granicy drugiego obszaru (rys. 9b) drgania mają charakter sygnału poliharmonicznego o częstości równej częstości wymuszenia.

Analiza kolejnych rezultatów (rys. 9c, 9d) pozwala na pewne uogólnienie wyciągniętych wniosków. W kolejnych rezonansach obserwuje się na przemian drgania  $2T$ -okresowe i okresowe, zawierające odpowiednio nieparzyste harmoniczne oraz wszystkie harmoniczne.

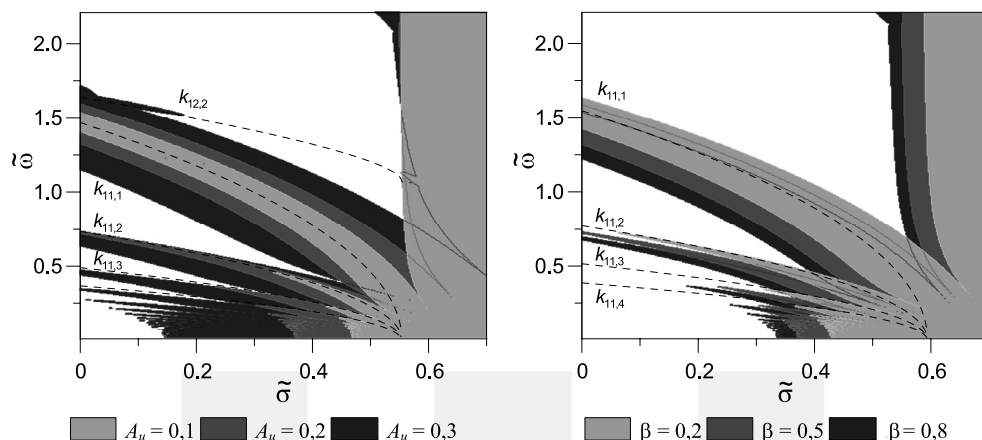


Rys. 10. Wpływ prędkości przepływu na obszary niestabilności; płaszczyzna  $\tilde{\sigma} - \tilde{\omega}$  ( $A_U = 0,25$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\nu = 2 \times 10^{-6}$ ,  $\zeta = 0,001$ ): a) podparcie przegubowe, b) utwierdzenie-przegub, c) obustronne utwierdzenie

Fig. 10. The influence of flow velocity on the instability regions; plane  $\tilde{\sigma} - \tilde{\omega}$  ( $A_U = 0.25$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\nu = 2 \times 10^{-6}$ ,  $\zeta = 0.001$ ): a) pinned–pinned, b) clamped–pinned, c) clamped–clamped

Na rysunku 10 przedstawiono wyniki analizy stabilności na płaszczyźnie  $\tilde{\sigma} - \tilde{\omega}$  dla trzech wartości prędkości przepływu ( $\tilde{U} = 0,3, 0,4, 0,5$ ). Ze wzrostem prędkości przepływu wzrasta prawdopodobieństwo wystąpienia zjawiska rezonansu kombinowanego (obszary ciemniejsze w zakresie wyższych częstości wymuszeń), a utrata stabilności przez wyboczenie zachodzi dla niższych wartości ciśnienia  $\tilde{\sigma}$ . Jest to więc potwierdzenie wcześniejszych wniosków. Tu również, tak jak poprzednio, w zakresie częstości mniejszych od  $2\tilde{\omega}_1$  trudno jest zaobserwować znaczące różnice dla różnych typów warunków brzegowych. Ten zakres częstości zostanie omówiony dalej w sposób konsekwentny na przykładzie przewodu o utwierdzonych obu końcach.





Rys. 11. Obszary niestabilności; płaszczyzna  $\tilde{\sigma}-\tilde{\omega}$  ( $\tilde{U}=0,5$ ,  $\nu=2 \times 10^{-6}$ ,  $\zeta=0,001$ ): a) wpływ amplitudy prędkości ( $\beta=0,5$ ), b) wpływ parametru  $\beta$  ( $A_U=0,2$ )

Fig. 11. The instability regions; plane  $\tilde{\sigma}-\tilde{\omega}$  ( $\tilde{U}=0.5$ ,  $\nu=2 \times 10^{-6}$ ,  $\zeta=0.001$ ): a) influence of flow pulsation amplitude ( $\beta=0.5$ ), b) influence of parameter  $\beta$  ( $A_U=0.2$ )

Obszary niestabilności, przedstawione na rysunku 11, ilustrują wpływ amplitudy pulsacji (rys. 11a dla  $A_U=0,1$ ,  $A_U=0,2$  i  $A_U=0,4$ ) i współczynnika  $\beta$ , charakteryzującego stosunek masy cieczy do masy całkowitej (rys. 11b dla  $\beta=0,2$ ,  $\beta=0,5$  i  $\beta=0,8$ ). Na rysunkach zaznaczono zależność częstoty wymuszenia od ciśnienia, dla której powinno wystąpić zjawisko rezonansu parametrycznego (krzywe  $k_{nm,i}$ ). Zwiększenie amplitudy pulsacji powoduje poszerzenie obszaru niestabilnego. Powyżej ciśnienia krytycznego następuje utrata stabilności przez wyboczenie.

Ze wzrostem wartości parametru  $\beta$  obszary rezonansu parametrycznego przesuwają się w kierunku niższych częstotliwości (ciemniejsze obszary), równocześnie utrata stabilności przez wyboczenie zachodzi dla mniejszych wartości ciśnień, poszerzają się też niepokazane tu zakresy rezonansów kombinowanych.

Interesujący przypadek z punktu widzenia poznawczego można zaobserwować na rys. 11a dla dużych amplitud pulsacji prędkości przepływu (najciemniejszy obszar). Obszar podstawowego rezonansu parametrycznego zostaje lekko zniekształcony, co jest skutkiem wpływu leżącego w pobliżu obszaru rezonansu kombinowanego (krzywa  $k_{12,2}$ ).

## 7. Wnioski

Z analizy przedstawionych wyników można wyciągnąć następujące wnioski:

- Wartość częstoty podstawowej układu silnie zależy od prędkości przepływu cieczy oraz od ciśnienia na końcu przewodu, zwiększanie tych parametrów powoduje w zakresie podkrytycznym zmniejszanie wartości częstoty własnej.
- Efektem zmiany sposobu podparcia z przegubowego na utwierdzony jest wzrost wartości częstoty własnej układu oraz wzrost wartości krytycznych prędkości i ciśnienia.

- Dla ciśnienia oraz prędkości przepływu, mniejszych od odpowiednich wartości krytycznych, w układzie może wystąpić zjawisko rezonansu parametrycznego. Największy wpływ na zakresy tego rezonansu mają, oprócz prędkości i ciśnienia, amplituda i częstość pulsacji oraz tłumienie wewnętrzne. Ze wzrostem średniej prędkości przepływu oraz ciśnienia na końcu przewodu zakresy niestabilne poszerzają się, równocześnie przesuując w kierunku niższych częstości.
- Warunki brzegowe w sposób istotny wpływają zarówno na wartości częstości własnych, jak również na zakresy rezonansu parametrycznego. Pomimo tego faktu rezultaty przeprowadzonych analiz są w sensie jakościowym podobne, a po wprowadzeniu nowych parametrów (odniesionych do krytycznych) także w sensie ilościowym są one zbliżone do siebie, zwłaszcza w zakresie podstawowego rezonansu parametrycznego.
- Proponowana metoda badania stabilności, bazująca na teorii Floqueta, jest bardzo efektywna. Ponieważ w celu wyznaczenia mnożników Floqueta należy scałkować numerycznie macierzowe równanie (39) tylko w jednym okresie, można zatem w relatywnie krótkim czasie dokonywać analiz jakościowych.
- W celu zbadania charakteru rozwiązań w zakresach niestabilnych należy poddać analizie model nieliniowy, np. uwzględniający geometryczne nieliniowości. W takiej analizie, prowadzonej metodą Galerkina, powinny być przydatne wprowadzone wielomiany ortogonalne.
- Rezultaty analiz numerycznych mogą być podstawą doboru parametrów układu hydraulicznego w planowanym eksperymencie.

## Literatura

- [1] Awrejcewicz J., *Drgania deterministyczne układów dyskretnych*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996.
- [2] Gorman D.G., Reese J.M., Zhang Y.L., *Vibration of a flexible pipe conveying viscous pulsating fluid flow*, Journal of Sound and Vibration, 230, 2, 2000, 379-392.
- [3] Jin J.D., Song Z.Y., *Parametric resonances of supported pipes conveying pulsating fluid*, Journal of Fluids and Structures, 20, 2005, 763-783.
- [4] Kadoli R., Ganesan N., *Parametric resonance of a composite cylindrical shell containing pulsatile flow of hot fluid*, Composite Structures, 65, 2004, 391-404.
- [5] Lee S. I., Chung J., *New non-linear modelling for vibration analysis of a straight pipe conveying fluid*, Journal of Sound and Vibration, 254, 2, 2002, 313-325.
- [6] Lee U., Jang I., Go H., *Stability and dynamic analysis of oil pipelines by using spectral element method*, Journal of Loss Prevention in the Process Industries, 22, 2009, 873-878.
- [7] Lee U., Park J., *Spectral element modelling and analysis of a pipeline conveying internal unsteady fluid*, Journal of Fluids and Structures, 22, 2006, 273-292.
- [8] Öz H.R., Boyacı H., *Transverse vibrations of tensioned pipes conveying fluid with time-dependent velocity*, Journal of Sound and Vibration, 236 (2), 2000, 259-276.
- [9] Mailybayev A.A., Seyranian A.P., *Parametric resonance in systems with small dissipation*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 65, 5, 2001, 755-767.

- [10] Païdoussis M.P., *Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*, vol. 1, Academic Press, London 1998.
- [11] Panda L.N., Kar R.C., *Nonlinear dynamics of a pipe conveying pulsating fluid with combination, principal parametric and internal resonances*, Journal of Sound and Vibration, 309, 2008, 375-406.
- [12] Udar R.S., Datta P.K., *Parametric combination resonance instability characteristics of laminated composite curved panels with circular cutout subjected to non-uniform loading with damping*, International Journal of Mechanical Sciences, 49, 3, 2007, 317-334.
- [13] Wang L., *A further study on the non-linear dynamics of simply supported pipes conveying pulsating fluid*, International Journal of Non-Linear Mechanics, 44, 2009, 115-121.
- [14] Yang X., Yang Y., Jin J., *Dynamic stability of a beam-model viscoelastic pipe for conveying pulsative fluid*, Acta Mechanica Solida Sinica, 20, 4, 2007, 350-356.
- [15] Zhang Y.L., Reese J.M., Gorman D.G., *An experimental study of the effects of pulsating and steady internal fluid flow on an elastic tube subjected to external vibration*, Journal of Sound and Vibration, 266, 2003, 355-367.

