

HENRYK CIUREJ*

INTERAKCJA INERCYJNYCH OBCIĄŻEŃ RUCHOMYCH
I KŁADKI DLA PIESZYCHINTERACTION AMONG MOVING INERTIAL LOADS
AND FOOTBRIDGE

Streszczenie

Celem niniejszego artykułu jest sformułowanie równań opisujących interakcję ruchomych obciążeń inercyjnych pieszych i rowerzystów z kładką dla pieszych. Uwzględniono również podukład masowych tłumików drgań. Zastosowano podejście *substructure*. W pierwszym etapie przedstawiono równania ruchu wszystkich rodzajów podukładów wchodzących w interakcję. Przedstawiono podstawowe zależności macierzowe opisujące interakcję tych ciał z pomostem kładki. Pokazane zależności pozwalają analizować odpowiedź konstrukcji przy jednoczesnym uwzględnieniu działania sił zmiennych w czasie i przestrzeni, ruchomych obciążeń inercyjnych, działania masowych tłumików drgań, oddziaływań kinematycznych.

Słowa kluczowe: kładki dla pieszych, dynamika, interakcja, ruchome obciążenia inercyjne, masowe tłumiki drgań

Abstract

The aim of the paper is formulation of equations expressing interaction among moving inertial loads of pedestrians and cyclists and a footbridge. The equations of motion of all interacting structures was shown. The fundamental matrices relations representing the interaction of all substructures and a deck was presented. The shown formulas allow to analysis of responses of structures with simultaneous excitations of forces changing in time and space, inertial moving loads, tuned mass dampers and kinematic excitations.

Keywords: footbridge, dynamic, interaction, moving inertial loads, tuned mass damper

* Dr inż. Henryk Ciurej, Instytut Mechaniki Budowli, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

Dynamika mostów dla pieszych pozostaje ciągle przedmiotem badań teoretycznych i doświadczalnych. Drgania tych konstrukcji wywołane są przede wszystkim ruchem użytkowników (pojedynczych pieszych, tłumem pieszych, rowerzystów itp.) oraz działaniem wiatru. Zadaniem projektanta jest takie zaprojektowanie konstrukcji, aby ograniczyć poziom drgań i spełnić kryteria komfortu użytkowania. Można to osiągnąć przez modyfikację układu nośnego (kształt, sztywność, podparcia, rozkład mas) lub/i poprzez użycie masowych tłumików drgań (Tuned Mass Dampers – TMDs) [5].

Zagadnienie analizy dynamicznej kładek przy wymuszeniu użytkowym staje się aktualne, jeśli weźmiemy pod uwagę współczesne trendy architektury preferujące lekkie, często geometrycznie wyrafinowane układy nośne. Wymagania architektoniczne powodują, że swoboda lokalizacji TMDs jest ograniczona. W przypadku lekkich układów nośnych, dodatkowe komplikacje wynikają z faktu, że poruszające się obciążenie (tłum pieszych), oddziałując na konstrukcję nie tylko jako poruszający się zestaw sił zmiennych w czasie i przestrzeni, ale także poprzez zmianę rozmieszczenia masy, może prowadzić do przestrojenia częstotliwości drgań własnych ustroju. Zmiana tych częstotliwości istotnie obniża skuteczność zastosowanych TMDs [5, 6].

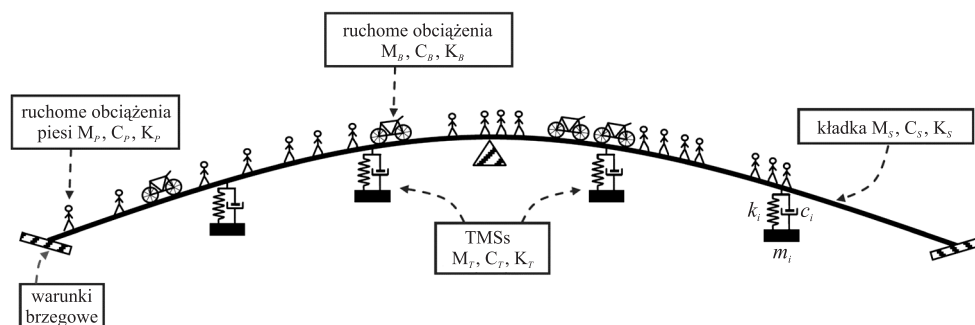
Dlatego też już na etapie projektowania należy wyznaczyć odpowiedź dynamiczną kładki przy ruchomym wymuszeniu inercyjnym. W przypadku lekkich konstrukcji kładek modelowanie pieszych i ich ruchu jako zbioru sił zmiennych w czasie i przestrzeni oddziałujących na pomost może być niewystarczające [23]. W takich konstrukcjach bardziej miarodajne jest modelowanie pieszych i/lub rowerzystów jako ruchome obciążenie inercyjne¹ [5].

Celem niniejszego artykułu jest teoretyczne sformułowanie równań ruchu układu złożonego z wielu ciał. W pierwszym etapie przedstawiono równania ruchu wszystkich rodzajów podukładów wchodzących w interakcję, tj. kładki dla pieszych, pieszego (zbioru pieszych), rowerzystów, zespołu tłumików masowych. Wyprowadzono podstawowe zależności macierzowe opisujące interakcję tych ciał z pomostem kładki. Zależności te prowadzą do finalnego układu równań ruchu. Rozwiązanie tego układu umożliwia uzyskanie przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń modelowanych elementów; ponadto można określić wielkości sił interakcji pomiędzy ciałami oraz sił reakcji samej konstrukcji kładki na podpory. Otrzymane wielkości mogą zostać porównane np. z dopuszczalnymi warunkami komfortu użytkowania, a także mogą zostać użyte w samym procesie projektowania np. do optymalnego rozmieszczenia TMDs oraz wyliczenia najlepszych parametrów tych urządzeń.

¹ Należy zaznaczyć, że włączenie do analizy modeli rowerów (rowerzysty) jest jedynie uzupełnieniem podstawowego obciążenia jakim są piesi (tłum). Z punktu widzenia praktycznego, obciążenie rowerzystami jest drugorzędne (mało znaczące) – poza wyjątkowymi sytuacjami przejazdu licznych grup rowerzystów (np. peletonu) przez kładkę – jednak wówczas nie analizuje się warunków komfortu użytkowania [1, 11].

2. Podstruktury układu

Na rys. 1 przedstawiono schemat rozważanej konstrukcji z wyróżnionymi podukładami. Na kładkę reprezentowaną przez macierze \mathbf{M}_S , \mathbf{C}_S , \mathbf{K}_S oddziałują: inercyjne obciążenia ruchome pieszych reprezentowane przez macierze \mathbf{M}_p , \mathbf{C}_p , \mathbf{K}_p ; rowerów – reprezentowane przez macierze \mathbf{M}_B , \mathbf{C}_B , \mathbf{K}_B . Ponadto do konstrukcji dołączono zespół TMDs reprezentowany przez macierze \mathbf{M}_T , \mathbf{C}_T , \mathbf{K}_T , gdzie każdy i -ty TMD modelowano trzema parametrami k_i , c_i , m_i . Kolejne grupy wymienionych macierzy reprezentują wyróżnione podukłady.



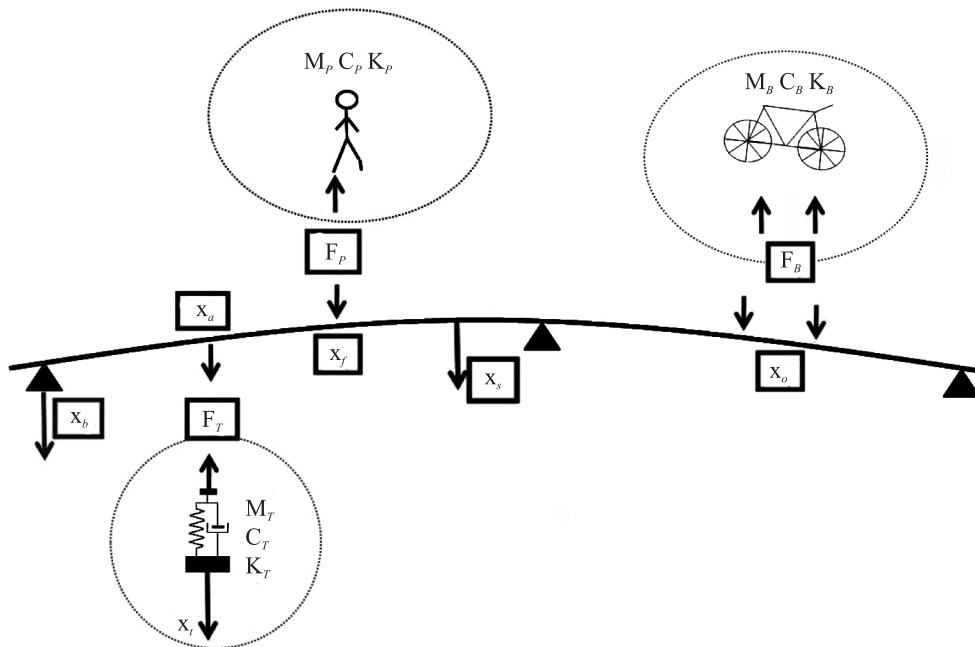
Rys. 1. Schemat konstrukcji z wyróżnionymi podukładami

Fig. 1. General object structure with depicted substructures

Model uwzględniający interakcje pomiędzy wszystkimi rodzajami ruchomych obiektów powstaje po wyróżnieniu zewnętrznych i wewnętrznych stopni swobody ciał i przy założeniu zgodności przemieszczeń zewnętrznych stopni swobody ruchomych modeli z przemieszczeniami odpowiednich stopni swobody pomostu kładki (wieży idealne i dwustronne) – rys. 2. Zastosowano tu podejście *substructure*, w którym oddzielnie buduje się modele obiektów wchodzących w interakcję, a następnie poprzez warunki zgodności przemieszczeń i wzajemności oddziaływania, buduje się ostateczny układ równań ruchu całego, złożonego systemu – w tym układzie nie występują już zewnętrzne stopnie swobody wyróżnionych podukładów [2–4, 17]. W modelu końcowym możliwa jest analiza ruchu wszystkich elementów składowych złożonego układu: kładka–inercyjne modele ruchome – TMDs. Pracą podejmującą podobny fizycznie temat jest [16], w której analizowano dynamikę belkowych mostów kolejowych obciążonych pociągami szybkobieżnymi. Wyprowadzono tam zależności macierzowe ukierunkowane na obliczenia numeryczne.

Lokomocję pieszych czy rowerów po pomoście kładki opisuje się innymi prawami – najczęściej nie sprzężonymi z ruchem pomostu. Przez lokomocję rozumie się tu ruch translacyjny (poruszanie się) pieszego (roweru). Skutkiem tego ruchu jest zmiana położenia pieszego (roweru) odniesiona do lokalnego układu współrzędnych związanego z pomostem kładki, tym samym wieży, tj. warunki zgodności przemieszczeń odpowiednich podukładów, są zależne od czasu. Termin lokomocja wprowadza się w celu odróżnienia go od ruchu pieszego (roweru) rozumianego jako przemieszczanie się mas będących składnikami ich własnego modelu dynamicznego. W najprostszym ujęciu lokomocję pieszych (rowerzystów) można opisać jako zależność pokonywanej drogi od czasu w ustalonym, nieruchomym układzie odniesienia (ξ, η) związanym z pomostem kładki w konfiguracji równowagi statycznej. Tak rozumiany

ruch wszystkich podukładów opisuje się jak w klasycznym MES: globalny układ współrzędnych jest nieruchomy (inercjalny), zaś lokalne układy współrzędnych elementów skończonych są układami ruchomymi, nieinercjalnymi [18]. Ostatecznie lokomocja pieszych (rowerów) po pomoście kładki powoduje, że układ posiada zmienną konfigurację.



Rys. 2. Podział układu na podukłady z wyróżnionymi siłami zewnętrznymi

Fig. 2. Division of general system into subsystems with depicted external forces

Finalny model pozostaje liniowy – opisany jest macierzami $\mathbf{M}(t)$, $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{K}(t)$, które są niestacjonarne i w ogólnym przypadku niesymetryczne.

3. Podukład kładki dla pieszych

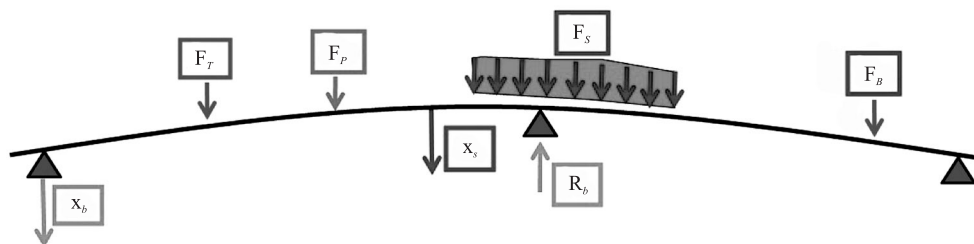
Dynamikę kładki dla pieszych opisano równaniem (1) – zob. rys. 3:

$$\mathbf{M}_S \ddot{\mathbf{x}}_S(t) + \mathbf{C}_S \dot{\mathbf{x}}_S(t) + \mathbf{K}_S \mathbf{x}_S(t) = \mathbf{F}_S(t) + \mathbf{R}_S(t) + \mathbf{F}_T(t) + \mathbf{F}_p(t) + \mathbf{F}_B(t) \quad (1)$$

gdzie: przemieszczenia konstrukcji – wektor $\mathbf{x}_S(t)$ – rozdzielono na wewnętrzne stopnie swobody $\mathbf{x}_s(t)$ i zewnętrzne $\mathbf{x}_b(t)$ związane z brzegiem (podporami). Podobnie rozdzielono siły odpowiadające poszczególnym stopniom swobody:

$$\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{R}_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{Ts} \\ \mathbf{f}_{Tb} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ps} \\ \mathbf{f}_{pb} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{Bs} \\ \mathbf{f}_{Bb} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Wektor \mathbf{F}_S – to siły działające na kładkę (statyczne i dynamiczne obciążenia np.: wiatr, śnieg, obciążenia technologiczne itp.), wektor \mathbf{R}_S to reakcje podpór kładki, wektor \mathbf{F}_T oznacza siły interakcji pomiędzy kładką a zbiorem TMDs, wektory \mathbf{F}_P , \mathbf{F}_B oznaczają siły interakcji pomiędzy kładką a układami inercyjnymi odpowiednio zbioru pieszych i rowerów poruszającymi się po kładce (rys. 3). Konsekwentnie podziałowi ulegają macierze \mathbf{M}_S , \mathbf{C}_S , \mathbf{K}_S reprezentujące konstrukcję – wzór (3), przy czym: \mathbf{M}_S – oznacza macierz bezwładności, \mathbf{C}_S – macierz tłumienia, a \mathbf{K}_S – macierz sztywności kładki.



Rys. 3. Siły oddziałujące na konstrukcję kładki

Fig. 3. Forces acting on a footbridge

$$\mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sb} \\ \mathbf{M}_{bs} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ss} & \mathbf{C}_{sb} \\ \mathbf{C}_{bs} & \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sb} \\ \mathbf{K}_{bs} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad (\bullet)_{bs} = (\bullet)_{sb}^T \quad (3)$$

Wymienione macierze są symetryczne, stacjonarne, a podmacierz \mathbf{K}_{ss} jest dodatnio określona. Tak ogólny sposób reprezentacji układu (1) może być wynikiem zastosowania metody elementów skończonych (MES). Dodatkowo pozwala on na analizę konstrukcji przy wymuszeniach kinematycznych, tj. przy $\mathbf{x}_b(t) \neq \mathbf{0}$ (osiadania lub wpływy sejsmiczne). Po uwzględnieniu w (1) zależności (2) (3) oraz rozwinięciu można zapisać:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{ss}\ddot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{C}_{ss}\dot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{K}_{ss}\mathbf{x}_s = \mathbf{f}_s + \mathbf{f}_{T_s} + \mathbf{f}_{P_s} + \mathbf{f}_{B_s} - \dot{\mathbf{Q}}_b \\ \dot{\mathbf{Q}}_b = \mathbf{M}_{sb}\ddot{\mathbf{x}}_b + \mathbf{C}_{sb}\dot{\mathbf{x}}_b + \mathbf{K}_{sb}\mathbf{x}_b \\ \dot{\mathbf{Q}}_s = \mathbf{M}_{bs}\ddot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{C}_{bs}\dot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{K}_{bs}\mathbf{x}_s \\ \dot{\mathbf{Q}}_b = \mathbf{M}_{bb}\ddot{\mathbf{x}}_b + \mathbf{C}_{bb}\dot{\mathbf{x}}_b + \mathbf{K}_{bb}\mathbf{x}_b \\ \mathbf{R}_b = \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_{T_b} + \mathbf{f}_{P_b} + \mathbf{f}_{B_b} - \dot{\mathbf{Q}}_s - \dot{\mathbf{Q}}_b \end{cases} \quad (4)$$

gdzie pierwsze równanie opisuje ruch wewnętrznych stopni swobody kładki – niewiadomymi są przemieszczenia \mathbf{x}_s i ich pochodne względem t , ostatnie równanie pozwala obliczyć reakcje podporowe \mathbf{R}_b . Oba równania zawierają siły interakcji z pozostałymi obiektami poruszającymi się po pomoście, a celem dalszych analitycznych wyliczeń jest podstawienie tych sił do wzoru (4), po wcześniejszym ich wyliczeniu z równań odpowiednich podukładów.

4. Równania ruchu i lokomocji obciążeń inercyjnych na kładkach dla pieszych

4.1. Podukład tłumy

4.1.1. Równania ruchu podukładu tłumy

Równanie ruchu podukładu tłumy jako obciążenia inercyjnego można zapisać w postaci równania (5):

$$\mathbf{M}_P \ddot{\mathbf{x}}_P(t) + \mathbf{C}_P \dot{\mathbf{x}}_P(t) + \mathbf{K}_P \mathbf{x}_P(t) = \mathbf{P}_P(t) + \mathbf{R}_P(t) \quad (5)$$

gdzie: przemieszczenia rozważanego podukładu – wektor $\mathbf{x}_P(t)$ – rozdzielono na wewnętrzne stopnie swobody podukładu $\mathbf{x}_p(t)$ i zewnętrzne $\mathbf{x}_f(t)$ związane ze stopami pojedynczych pieszych – w miejscach ich kontaktu z pomostem kładki zapisuje się warunki zgodności przemieszczeń. Analogicznie do (2) dokonano rozdziału zmiennych:

$$\mathbf{x}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_f \end{bmatrix}, \mathbf{P}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_p \\ \mathbf{p}_f \end{bmatrix}, \mathbf{R}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}_f \end{bmatrix} \quad (6)$$

oraz konsekwentnie (jak w (3)) rozdzielono macierze:

$$\mathbf{M}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{pp} & \mathbf{M}_{pf} \\ \mathbf{M}_{fp} & \mathbf{M}_{ff} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{pp} & \mathbf{C}_{pf} \\ \mathbf{C}_{fp} & \mathbf{C}_{ff} \end{bmatrix}, \mathbf{K}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{pf} \\ \mathbf{K}_{fp} & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix} \text{ i } (\bullet)_{pf} = (\bullet)_{fp}^T \quad (7)$$

Wymienione macierze są symetryczne, stacjonarne, a podmacierz \mathbf{K}_{pp} jest dodatnio określona. Po uwzględnieniu w (5) zależności (6) (7) oraz rozwinięciu można zapisać:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{pp} \ddot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{C}_{pp} \dot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{K}_{pp} \mathbf{x}_p = \mathbf{p}_p - \ddot{\mathbf{Q}}_f \\ \ddot{\mathbf{Q}}_f = \mathbf{M}_{pf} \ddot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{C}_{pf} \dot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{K}_{pf} \mathbf{x}_p \\ \ddot{\mathbf{Q}}_p = \mathbf{M}_{fp} \ddot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{C}_{fp} \dot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{K}_{fp} \mathbf{x}_p \\ \ddot{\mathbf{Q}}_f = \mathbf{M}_{ff} \ddot{\mathbf{x}}_f + \mathbf{C}_{ff} \dot{\mathbf{x}}_f + \mathbf{K}_{ff} \mathbf{x}_f \\ \mathbf{R}_f = \mathbf{p}_f - \ddot{\mathbf{Q}}_p - \ddot{\mathbf{Q}}_f \end{cases} \quad (8)$$

gdzie pierwsze równanie macierzowe opisuje ruch wewnętrznych stopni swobody modelu dynamicznego podukładu tłumy – niewiadomymi są przemieszczenia \mathbf{x}_p i ich pochodne względem t , ostatnie równanie pozwala obliczyć reakcje \mathbf{R}_f oddziaływania stóp pieszych w miejscach ich kontaktu z pomostem. Oba równania zawierają przemieszczenia stóp \mathbf{x}_f i ich pochodne, które są związane ze stopniami swobody kładki \mathbf{x}_S poprzez macierz transformacji \mathbf{Z} zależną od zmiennego w czasie położenia (lokomocji) tłumy odniesionego do lokalnego układu współrzędnych związanego z pomostem kładki:

$$\mathbf{x}_f(t) = \mathbf{Z}[\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\eta}(t)] \mathbf{x}_S(t) \quad (9)$$

Z kolei siły interakcji zależą od macierzy \mathbf{Z}^T :

$$\mathbf{F}_p(t) = \mathbf{Z}^T [\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\eta}(t)] \mathbf{R}_f(t) \quad (10)$$

Obie relacje (9) (10) opisują zgodność przemieszczeń i sił w punkcie kontaktu podkładu z konstrukcją. Występujące w (8) absolutne pochodne przemieszczeń \mathbf{x}_p dane są wzorami:

$$\dot{\mathbf{x}}_f = \dot{\mathbf{Z}}\mathbf{x}_S + \mathbf{Z}\dot{\mathbf{x}}_S, \quad \ddot{\mathbf{x}}_f = \ddot{\mathbf{Z}}\mathbf{x}_S + 2\dot{\mathbf{Z}}\dot{\mathbf{x}}_S + \mathbf{Z}\ddot{\mathbf{x}}_S \quad (11)$$

Przedstawione równanie (5) jest formułą, do której można sprowadzić cały podkład tłumy złożony z L_p pieszych oraz pozostaje w mocy także dla każdego pojedynczego pieszego.

Założmy, że dla każdego n -tego pieszego są znane składowe aktualnego położenia $\xi_{[n]}(t)$, $\eta_{[n]}(t)$ odniesionego do lokalnego układu współrzędnych związanego z pomostem oraz aktualne prędkości lokomocji $\dot{\xi}_{[n]}(t)$, $\dot{\eta}_{[n]}(t)$. Prędkości oraz położenia są wyliczone z rozwiązania odrębnych równań lokomocji podkładu tłumy (zob. rozdz. 4.1.2).

Równanie ruchu poruszającego się po pomoście n -tego pieszego analogicznie do (5) można zapisać:

$$\mathbf{M}_{p[n]}\ddot{\mathbf{x}}_{p[n]} + \mathbf{C}_{p[n]}\dot{\mathbf{x}}_{p[n]} + \mathbf{K}_{p[n]}\mathbf{x}_{p[n]} = \mathbf{P}_{p[n]} + \mathbf{R}_{p[n]} \quad \forall n = 1, \dots, L_p \quad (12)$$

Mając na uwadze wzory (6) (7), wprowadza się następujące uporządkowanie zmiennych:

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{p[1]} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{p[L_p]} \end{bmatrix} \sum_{n=1}^{L_p} N_{p[n]}, \quad \mathbf{x}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{f[1]} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{f[L_p]} \end{bmatrix} \sum_{n=1}^{L_p} N_{f[n]}, \quad \mathbf{R}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{f[1]} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{f[L_p]} \end{bmatrix} \sum_{n=1}^{L_p} N_{f[n]} \quad (13)$$

We wzorze (13) wielkości $N_{f[n]}$ oraz $N_{p[n]}$ oznaczają odpowiednio liczby zewnętrznych i wewnętrznych stopni swobody n -tego pieszego – w ogólności może zachodzić:

$$\forall_{n_1 \neq n_2} N_{f[n_1]} \neq N_{f[n_2]} \quad \text{oraz} \quad N_{p[n_1]} \neq N_{p[n_2]}$$

Ponadto dla każdego n -tego pieszego znana jest macierz transformacji $\mathbf{Z}_{[n]}$, a także relacje zgodności przemieszczeń i reakcji:

$$\mathbf{x}_{f[n]}(t) = \mathbf{Z}_{[n]} [\xi_{[n]}(t), \eta_{[n]}(t)] \mathbf{x}_S(t), \quad \mathbf{F}_{p[n]}(t) = \mathbf{Z}_{[n]}^T \mathbf{R}_{f[n]} \quad (14)$$

gdzie uwzględniając (13), można zapisać:

$$\mathbf{x}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{[1]} \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_{[L_p]} \end{bmatrix} \mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{fs[1]} & \mathbf{Z}_{fb[1]} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{Z}_{fs[L_p]} & \mathbf{Z}_{fb[L_p]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_S \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{pS} \\ \mathbf{f}_{pB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{sf[1]} & \cdots & \mathbf{Z}_{sf[L_p]} \\ \mathbf{Z}_{bf[1]} & \cdots & \mathbf{Z}_{bf[L_p]} \end{bmatrix} \mathbf{R}_f \quad (15)$$

W powyższym wzorze (15) ujawnia się struktura macierzy \mathbf{Z} z równań (9) (10), przy czym $\mathbf{Z}_{f[n]} = \mathbf{Z}_{bf[n]}^T$ oraz $\mathbf{Z}_{fs[n]} = \mathbf{Z}_{sf[n]}^T$, $n = 1, \dots, L_p$. Wobec tego odpowiednio prawdziwe są dla każdego n -tego pieszego poniższe wzory (analogicznie do (11)):

$$\dot{\mathbf{x}}_{f[n]} = \dot{\mathbf{Z}}_{[n]} \mathbf{x}_S + \mathbf{Z}_{[n]} \dot{\mathbf{x}}_S, \quad \ddot{\mathbf{x}}_{f[n]} = \ddot{\mathbf{Z}}_{[n]} \mathbf{x}_S + 2\dot{\mathbf{Z}}_{[n]} \dot{\mathbf{x}}_S + \mathbf{Z}_{[n]} \ddot{\mathbf{x}}_S \quad (16)$$

gdzie (zob. wzór (14)):

$$\dot{\mathbf{Z}}_{[n]} = \mathbf{Z}_{[n]}' \xi_{[n]} \dot{\xi}_{[n]} + \mathbf{Z}_{[n]}' \eta_{[n]} \dot{\eta}_{[n]} \quad (17)$$

$$\ddot{\mathbf{Z}}_{[n]} = \mathbf{Z}_{[n]}' \xi_{[n]} \dot{\xi}_{[n]}^2 + 2\mathbf{Z}_{[n]}' \xi_{[n]} \eta_{[n]} \dot{\xi}_{[n]} \dot{\eta}_{[n]} + \mathbf{Z}_{[n]}' \eta_{[n]} \dot{\eta}_{[n]}^2 + \mathbf{Z}_{[n]}' \xi_{[n]} \ddot{\xi}_{[n]} + \mathbf{Z}_{[n]}' \eta_{[n]} \ddot{\eta}_{[n]} \quad (18)$$

przy czym:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{[n]}' \xi_{[n]} &= \frac{\partial \mathbf{Z}_{[n]}}{\partial \xi_{[n]}}, & \mathbf{Z}_{[n]}' \xi_{[n]} \xi_{[n]} &= \frac{\partial^2 \mathbf{Z}_{[n]}}{\partial \xi_{[n]}^2}, & \mathbf{Z}_{[n]}' \eta_{[n]} &= \frac{\partial \mathbf{Z}_{[n]}}{\partial \eta_{[n]}} \\ \mathbf{Z}_{[n]}' \eta_{[n]} \eta_{[n]} &= \frac{\partial^2 \mathbf{Z}_{[n]}}{\partial \eta_{[n]}^2}, & \mathbf{Z}_{[n]}' \xi_{[n]} \eta_{[n]} &= \frac{\partial^2 \mathbf{Z}_{[n]}}{\partial \xi_{[n]} \partial \eta_{[n]}} \end{aligned} \quad (19)$$

Przy tak dokonanej rozdzielności zmiennych w (13) poszczególne podmacierze macierzy sztywności \mathbf{K}_p w (7) wyrażają się wzorami:

$$\mathbf{K}_{pp} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp[1]} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_{pp[L_p]} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{ff} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff[1]} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_{ff[L_p]} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{K}_{pf} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pf[1]} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_{pf[L_p]} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{fp} = \mathbf{K}_{pf}^T \quad (21)$$

Analogicznie zbudowane są podmacierze macierzy tłumienia \mathbf{C}_p i bezwładności \mathbf{M}_p podukładu tłumy – wzór (7).

4.1.2. Równania lokomocji tłumy

Odrębnej dyskusji wymaga opis lokomocji pieszych po moście. Można tu wyróżnić dwa ogólne podejścia. Pierwsze polega na opisie lokomocji tłumy równaniami przepływu, w których gęstość masy (dla klasycznego sformułowania) zastępuje gęstość tłumy (lub gęstości kilku strumieni pieszych). Równania przepływu w tym podejściu modyfikowane są odpowiednimi funkcjami i współczynnikami m.in. maksymalną dopuszczalną gęstością tłumy, maksymalną prędkością, czy współczynnikiem wrażliwości z uwagi na cel podróży² [10, 14]. Należy sformułować też warunki początkowo-brzegowe. W bardziej zaawansowanych modelach wprowadza się funkcje modyfikujące zachowanie się strumieni pieszych z uwagi

² Zwykle jest to przeciwna strona kładki, np. po drugiej stronie rzeki lub przekraczanej przeszkody.

na uwarunkowania psychofizyczne i socjologiczne [15]. Jednakże w tym podejściu istnieje trudność z wprowadzeniem do analizy indywidualnego pieszego.

Drugi sposób opisu lokomocji tłumu polega na sformułowaniu prawa lokomocji każdego indywidualnego pieszego (zwanego *agentem*) – prawa uwzględniającego interakcję pieszego ze zmiennym środowiskiem zewnętrznym oraz wprowadzającego indywidualne cechy każdego osobnika, takie jak: uwarunkowania psychofizyczne, socjologiczne, odporność na panikę itp. Do uwarunkowań zewnętrznych środowiska należą: inni pieszy tworzący tłum, zbiór geometrycznych ograniczeń lokomocji (np. przeszkody, bariery) oraz możliwe drogi wejścia i wyjścia z analizowanego obszaru lokomocji. W tym zakresie dobrze opracowanym modelem tłumu jest HiDAC (*High-Density Autonomous Crowds*) [20, 21], w którym wszystkie wymienione wcześniej czynniki mogą być zmienne w czasie i przestrzeni, tworząc tym samym zmienne środowisko, w którym porusza się pieszy i wchodząc z nim w interakcję, np. unikając kolizji, reagując na omijanych i wyprzedzanych przechodniów, dynamicznie zmieniają prędkość i kierunek lokomocji, dostosowując się do aktualnej sytuacji w bliskim otoczeniu.

Model HiDAC jest jednym z najbardziej rozbudowanych i jednocześnie najchętniej stosowanych opisów zachowania się tłumu³, a w kontekście omawianej problematyki interakcji pieszego z konstrukcją – istnieje w nim naturalna możliwość analizy oddzielnie każdego n -tego pieszego. Kolejną dogodnością modelu HiDAC jest operowanie terminologią zbliżoną do stosowanej w dynamice cząstek oraz formalizmem równań stanu jak w klasycznych systemach dynamicznych. Przy czym analogiem cząstki jest tu pieszy, a interakcje ze środowiskiem są modelowane jako „siły”⁴. Pełny opis modelu HiDAC wykracza poza cel i zakres niniejszego artykułu, niemniej podano niżej podstawowe dwa równania stanu z pobieżnym ich wyjaśnieniem⁵. Zapis równań stanu modelu HiDAC przedstawiono tu w formie zaczerpniętej z [20]. Pierwszym równaniem jest bilans oddziaływań na n -tego pieszego w aktualnym k -tym kroku czasowym:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{[n]}^{To}(k) = & \mathbf{F}_{[n]}^{To}(k-1) + w_{[n]}^{At} \mathbf{F}_{[n]}^{At}(k) + w_{[n]}^{Wa} \sum_i \mathbf{F}_{[i|n]}^{Wa}(k) + \\ & + w_{[n]}^{Ob} \sum_j \mathbf{F}_{[j|n]}^{Ob}(k) + w_{[n]}^{Or} \sum_{[r] \neq [n]} \mathbf{F}_{[r|n]}^{Or}(k) \end{aligned} \quad (22)$$

gdzie:

- $\mathbf{F}_{[n]}^{To}$ – kierunek (wektor) oddziaływania na pieszego,
- $\mathbf{F}_{[n]}^{At}$ – „siła przyciągania” do aktualnego celu lokomocji (może on być zmienny),
- $\mathbf{F}_{[i|n]}^{Wa}$ – „siła unikania” od i -tej ściany lub bariery,

³ Zastosowanie modelu HiDAC wykracza znacznie poza prezentowaną tu tematykę lokomocji. Służy m.in. do symulacji i badania zjawiska paniki oraz jego narastania w tłumie; znajdowania najlepszych dróg ewakuacji w rozmaitych warunkach ekstremalnych (różna gęstość tłumu, warunki pożaru, zamachy terrorystyczne itp.); symulacji lokomocji pieszych w sklepach, galeriach, obiektach przemysłowych itp.

⁴ Nie należy ich rozumieć w sensie fizycznej siły mierzonej w niutonach, w szczególności nie zachodzi tu relacja wzajemności jak w III zasadzie dynamiki. Dlatego w opisie prezentowanych tu wzorów słowo *siły* wzięto w cudzysłów.

⁵ Pełne sformułowanie i opis modelu HiDAC można znaleźć w cytowanej tu literaturze oraz dodatkowo w [19, 22].

- $\mathbf{F}_{j[n]}^{Ob}$ – „siła unikania” od j -tej przeszkody (np. stojące przedmioty lub tymczasowe utrudnienia ruchu natury geometrycznej),
- $\mathbf{F}_{r[n]}^{Ot}$ – „siły unikania” od r -tego pieszego, który znalazł się w zdefiniowanym obszarze interakcji z n -tym pieszym.

Uwidocznione współczynniki $w_{[n]}^{\bullet\bullet}$ określające udział poszczególnych oddziaływań w całej sumie (22) mają wartości losowe z zakresu ustalonego empirycznie.

Drugie równanie określa nowe położenie n -tego pieszego:

$$\mathbf{p}_{[n]}(k+1) = \mathbf{p}_{[n]}(k) + \alpha_{[n]}(k) \mathbf{v}_{[n]}(k) \left\{ \left[1 - \beta_{[n]}(k) \right] \mathbf{f}_{[n]}^{To}(k) + \beta_{[n]}(k) \mathbf{F}_{[n]}^{Fa}(k) \right\} \Delta T + \tilde{\mathbf{R}}_{[n]}(k) \quad (23)$$

gdzie:

- $\mathbf{p}_{[n]} = \left[\xi_{[n]} \eta_{[n]} \right]$ – położenie pieszego,
- $\mathbf{v}_{[n]} = \left[\dot{\xi}_{[n]} \dot{\eta}_{[n]} \right]$ – prędkość pieszego,
- $\mathbf{f}_{[n]}^{To}$ – wektor wektora $\mathbf{F}_{[n]}^{To}$,
- $\mathbf{F}_{[n]}^{Fa}$ – „siły unikania” od leżącego pieszego, który znalazł się w zdefiniowanym obszarze interakcji,
- $\alpha_{[n]}$ – współczynnik empiryczny,
- $\beta_{[n]}$ – priorytet omijania leżącego pieszego,
- $\tilde{\mathbf{R}}_{[n]}$ – „siły odpychania” od przeszkód i innych pieszych bezpośrednio wpływające na zmianę położenia:

$$\tilde{\mathbf{R}}_{[n]}(k) = \sum_i \tilde{\mathbf{R}}_{i[n]}^{Wa}(k) + \sum_j \tilde{\mathbf{R}}_{j[n]}^{Ob}(k) + \lambda \sum_{r \neq [n]} \tilde{\mathbf{R}}_{r[n]}^{Ot}(k)$$

gdzie:

- $\tilde{\mathbf{R}}_{i[n]}^{Wa}$ – „siły odpychania” od i -tej ściany,
- $\tilde{\mathbf{R}}_{j[n]}^{Ob}$ – „siły odpychania” od j -tej przeszkody.
- $\tilde{\mathbf{R}}_{r[n]}^{Ot}$ – „siły odpychania” od r -tego pieszego, który znalazł się w zdefiniowanym obszarze interakcji z n -tym pieszym,
- λ – współczynnik empiryczny.

W cytowanych pracach podano dalsze wzory na pozostałe wielkości, których tu nie pokazano.

Jak można zauważyć, w prezentowanym modelu pozostaje swoboda do wprowadzenia np. sprzężenia pomiędzy ruchem pomostu kładki a równaniami stanu opisującymi lokomocję – taka zależność jest obserwowana w rzeczywistych konstrukcjach kładek dla pieszych, które doznają zauważalnych, niekomfortowych drgań [1].

Model HiDAC jest zestawem równań, którego rozwiązanie można łatwo zrównoleglić. W prezentowanym sformułowaniu może być analizowany niezależnie od równań ruchu konstrukcji i modeli inercyjnych. Rezultatem obliczeń są położenia i prędkości lokomocji każdego pieszego w czasie, odniesione do pomostu kładki – co jest podstawą wyznaczenia macierzy transformacji $\mathbf{Z}_{[n]}$.

4.1.3. Uproszczone modele dynamicznego pieszego

Zagadnienie modelowania dynamiki ciała ludzkiego (również podczas marszu) jest złożonym, interdyscyplinarnym zadaniem analitycznym. Z reguły takie modele dynamicznie służą do wyznaczenia sił działających na modelowane części ciała. Mogą być też podstawą tworzenia modeli ortopedycznych, czy robotów humanoidalnych z układami sterowania. Niestety autor nie napotkał publikacji dotyczącej modelu dynamicznego człowieka, opracowanego w celu odtworzenia sił działających na podłoże podczas marszu, z jednoczesnym zachowaniem bogatej kinematyki ruchu pieszego – ciekawą pracą w tym zakresie jest [25], która jednak ma ograniczone zastosowanie z uwagi na niewielkie możliwości sterowania parametrami lokomocji. Model taki (przez analogię do innych wymienionych modeli) musiałby być niestacjonarny i nieliniowy (macierze bezwładności, tłumienia i sztywności zależne od aktualnej konfiguracji ciała i od czasu) ze złożoną kinematyką i sterowaniem. Dlatego też, z uwagi na komplikację wymienionych modeli, do opisu interakcji konstrukcja-pieszcy stosuje się najprostsze modele ciała ludzkiego, uzupełniając je empirycznie pomierzonymi wartościami sił oddziaływania stóp na nieruchome, płaskie powierzchnie pomostów. W tym zakresie można wymienić prace [7, 8, 9, 24, 27] oraz obszerną pracę przeglądową [1].

Najczęściej zakłada się, że:

- 1) kontakt pieszego z pomostem odbywa się w jednym punkcie, który jest rzutem środka ciężkości pieszego na powierzchnię pomostu; kierunek rzutowania jest przestrzennie ustalony i zgodny z kierunkiem oraz zwrotem działania przyspieszenia ziemskiego (siły ciężkości),
- 2) kontakt jest idealny i dwustronny. Położenie punktu kontaktu jest zmienne – zgodnie z równaniem lokomocji pieszego. W ten sposób zaniedbuje się fakt, że rzeczywisty kontakt pieszego z pomostem jest bardzo złożonym zjawiskiem i odbywa się naprzemiennie prawą lub lewą nogą, lub obiema nogami jednocześnie w zależności od fazy stawianego kroku.

Przedstawione tu modele pieszego są liniowe, stacjonarne i nie uwzględniają sprzężenia ruchu pomostu z parametrami mechanicznymi modelu ciała oraz z prawem lokomocji. To ostatnie sprzężenie, gdyby było analizowane, musiałoby się objawiać (w najprostszym przypadku) zależnością macierzy transformacji $\mathbf{Z}_{[n]}$ od prędkości drgań konstrukcji $\dot{\mathbf{x}}_s$ [1, 5, 7].

Maska skupiona

Najprostszym modelem dynamicznym pieszego jest masa skupiona (rys. 4). Zakłada się, że cała masa pieszego skupiona jest w jednym punkcie kontaktu pieszego z pomostem. Przy przyjętych założeniach uzyskuje się jedynie efekt ruchomej masy, natomiast siły generowane podczas marszu należy wprowadzić ze znanych w literaturze formuł empirycznych [1, 5, 8, 9, 24]. I tak wypadkowe siły:

– pionowe

$$p_{v[n]}(t) = m_{[n]}g \left[1 + \sum_{i=1}^5 \alpha_i (f_{[n]}) \sin(2\pi i f_{[n]} t - \alpha_{i[n]}) \right] \quad (24)$$

– poziome wzdłuż kierunku lokomocji

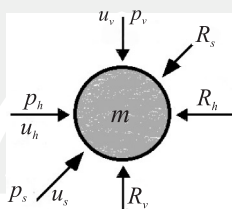
$$p_{h[n]}(t) = m_{[n]}g \sum_{i=1}^5 \beta_i (f_{[n]}) \sin(2\pi i f_{[n]} t - \theta_{i[n]}) \quad (25)$$

– poziome w poprzek kierunku lokomocji

$$p_{s[n]}(t) = m_{[n]} g \sum_{i=1}^5 \lambda_i (f_{[n]}) \sin(\pi i f_{[n]} t - \phi_{i[n]}) \quad (26)$$

gdzie $f_{[n]}$ oznacza częstotliwość stawianych kroków; liczby $\alpha_i(f_{[n]})$, $\beta_i(f_{[n]})$, $\lambda_i(f_{[n]})$ są współczynnikami rozwinięcia w szereg Fouriera poszczególnych, empirycznie zmierzonych sił wypadkowych. Przy tak przyjętym modelu jedynymi niepustymi macierzami i wektorami pozostają poniżej zestawione:

$$\mathbf{M}_{ff[n]} = m_{[n]} \text{diag}[1 \ 1 \ 1], \mathbf{p}_{f[n]} = \begin{bmatrix} p_{v[n]} \\ p_{h[n]} \\ p_{n[n]} \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{f[n]} = \begin{bmatrix} u_{v[n]} \\ u_{h[n]} \\ u_{s[n]} \end{bmatrix}, \mathbf{R}_{f[n]} = \begin{bmatrix} R_{v[n]} \\ R_{h[n]} \\ R_{s[n]} \end{bmatrix} \quad (27)$$



Rys. 4. Uproszczony model dynamiczny pieszego – masa skupiona

Fig. 4. Simplified human body model – discrete mass

Model ISO 5982

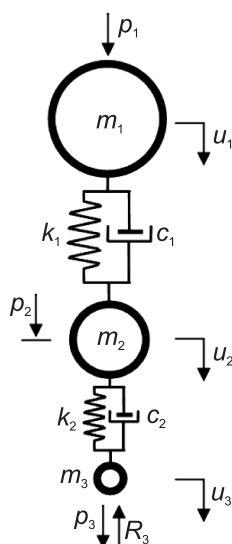
Jeden z najprostszych modeli pieszego przedstawiono na rys. 5 za pracą [23]. Jest to zaadoptowany z normy ISO 5982 model dynamiczny człowieka stojącego, gdzie górną masę m_1 utożsamia się ze środkiem masy ciała. Macierze równania ruchu dla tego modelu z rozdziałem na zewnętrzne i wewnętrzne stopnie swobody przedstawiają poniższe zależności:

$$\mathbf{M}_{pp[n]} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{ff[n]} = [m_3], \mathbf{M}_{pf[n]} = \mathbf{0} \quad (28)$$

$$\mathbf{C}_{pp[n]} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{ff[n]} = [c_3], \mathbf{C}_{pf[n]} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\mathbf{K}_{pp[n]} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{ff[n]} = [k_2], \mathbf{K}_{pf[n]} = \begin{bmatrix} 0 \\ -k_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\mathbf{p}_{p[n]} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_{f[n]} = [p_3], \mathbf{x}_{p[n]} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{f[n]} = [u_3], \mathbf{R}_{f[n]} = [R_3] \quad (31)$$



Rys. 5. Uproszczony model dynamiczny pieszego wg normy ISO 5982 [12, 23]

Fig. 5. Simplified ISO 5982 human body model [12, 23]

Parametry normowe tego modelu wynoszą $k_1 = 62 \text{ kN/m}$, $c_1 = 1,46 \text{ kNs/m}$, $k_2 = 80 \text{ kN/m}$, $c_2 = 0,93 \text{ kNs/m}$, $m_1 = 62 \text{ kg}$, $m_2 = 13 \text{ kg}$, $m_3 = 0 \text{ kg}$, $p_2 = 0 \text{ N}$, $p_3 = 0 \text{ N}$. Dodatkowo należy wprowadzić siły generowane przez pieszego podczas marszu w punkcie kontaktu (masa m_3). Jak zaproponowano w [23], można tego dokonać poprzez wprowadzenie zastępczej siły p_1 danej wzorem:

$$p_1(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_5, \tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_5, t, f_p) = (m_1 + m_2)g \left[1 + \sum_{i=1}^5 \tilde{\alpha}_i(f_p) \sin(2\pi i f_p t - \tilde{\varphi}_i) \right] \quad (32)$$

Parametry swobodne w (32) czyli $\tilde{\alpha}_i$ oraz $\tilde{\varphi}_i$ ($i = 1, \dots, 5$) ustala się rozwiązując problem minimalizacyjny:

$$\min_{\tilde{\alpha}_i, \tilde{\varphi}_i} \max_{t \in [t_1, t_2]} [p_{v[n]}(t) - p_1(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_5, \tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_5, t, f_{[n]})]^2 \quad (33)$$

gdzie $p_{v[n]}(t)$ określono wzorem (24). Powyższe zadanie wyraża ideę, że siły generowane przez omawiany model dynamiczny pieszego podczas lokomocji po sztywnej, płaskiej i nieruchomej powierzchni, powinny być równe siłom mierzonym empirycznie – wzór (24) przy tej samej częstotliwości kroków $f_p = f_{[n]}$; w tym sensie zastępcza siła p_1 (wzór (32)) ma jedynie sens formalny, ponieważ na środek masy w rzeczywistości działa jedynie siła ciężkości.

4.2. Podukład peletonu

4.2.1. Równania ruchu peletonu rowerzystów

Równanie ruchu podukładu peletonu buduje się identycznie jak dla podukładu tłumy – stąd przedstawiono tu jedynie zasadnicze zależności – głównie z konieczności wprowadzenia odpowiednich oznaczeń. Równanie ruchu podukładu peletonu jako obciążenia inercyjnego, można zapisać w postaci równania (34):

$$\mathbf{M}_B \ddot{\mathbf{x}}_B(t) + \mathbf{C}_B \dot{\mathbf{x}}_B(t) + \mathbf{K}_B \mathbf{x}_B(t) = \mathbf{P}_B(t) + \mathbf{R}_B(t) \quad (34)$$

Analogicznie do (6) dokonano rozdziału zmiennych na wewnętrzne $\mathbf{x}_r(t)$ i zewnętrzne stopnie swobody $\mathbf{x}_o(t)$ związane z kołami (oponami):

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_r \\ \mathbf{x}_o \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_r \\ \mathbf{p}_o \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}_o \end{bmatrix} \quad (35)$$

oraz konsekwentnie (jak w (7)) rozdzielono macierze:

$$\mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{rr} & \mathbf{M}_{ro} \\ \mathbf{M}_{or} & \mathbf{M}_{oo} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{rr} & \mathbf{C}_{ro} \\ \mathbf{C}_{or} & \mathbf{C}_{oo} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{rr} & \mathbf{K}_{ro} \\ \mathbf{K}_{or} & \mathbf{K}_{oo} \end{bmatrix} \quad i \quad (\bullet)_{ro} = (\bullet)_{or}^T \quad (36)$$

Wymienione macierze są symetryczne, stacjonarne, a podmacierz \mathbf{K}_{rr} jest dodatnio określona. Po uwzględnieniu w (34) zależności (35) (36) oraz rozwinięciu można zapisać równania analogiczne do (8), z tym że należy tu zmienić odpowiednie indeksy, mianowicie: indeks $_p$ zastąpić indeksem $_r$, a indeks $_f$ – indeksem $_o$. Interpretacja powstałego układu równań jest identyczna jak poprzednio. Analogicznie równania ruchu zawierają przemieszczenia, tym razem kół \mathbf{x}_o i ich pochodne, które są związane ze stopniami swobody kładki \mathbf{x}_s przez macierz transformacji \mathbf{T} , zależną od zmiennego w czasie położenia (lokomocji) peletonu:

$$\mathbf{x}_o(t) = \mathbf{T}[\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\eta}(t)] \mathbf{x}_s(t) \quad (37)$$

Z kolei siły interakcji zależą od macierzy \mathbf{T}^T :

$$\mathbf{F}_o(t) = \mathbf{T}^T[\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\eta}(t)] \mathbf{R}_o(t) \quad (38)$$

Obie relacje (37) (38) opisują zgodność przemieszczeń i sił w punktach kontaktu rozważanego podukładu z pomostem kładki. Występujące w równaniach absolutne pochodne przemieszczeń \mathbf{x}_o , dane są wzorami analogicznymi do (11) – należy jedynie podmienić odpowiednie oznaczenia.

Przedstawione równanie (34) jest formułą, do której można sprowadzić cały podukład peletonu złożony z L_b rowerzystów oraz pozostaje w mocy także dla każdego pojedynczego rowerzysty. Zatem równanie ruchu poruszającego się po konstrukcji n -tego rowerzysty analogicznie do (12) można zapisać:

$$\mathbf{M}_{B[n]} \ddot{\mathbf{x}}_{B[n]} + \mathbf{C}_{B[n]} \dot{\mathbf{x}}_{B[n]} + \mathbf{K}_{B[n]} \mathbf{x}_{B[n]} = \mathbf{P}_{B[n]} + \mathbf{R}_{B[n]} \quad \forall n = 1, \dots, L_b \quad (39)$$

Mając na uwadze równanie (35) (36), wprowadza się następujące uporządkowanie zmiennych:

$$\mathbf{x}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{r[1]} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{r[L_b]} \end{bmatrix} \left\{ \sum_{n=1}^{L_b} N_{r[n]} \right\}, \quad \mathbf{x}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{o[1]} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{o[L_b]} \end{bmatrix} \left\{ \sum_{n=1}^{L_b} N_{o[n]} \right\}, \quad \mathbf{R}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{o[1]} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{o[L_b]} \end{bmatrix} \left\{ \sum_{n=1}^{L_b} N_{o[n]} \right\} \quad (40)$$

We wzorze (40) wielkości $N_{o[n]}$ oraz $N_{r[n]}$ oznaczają odpowiednio liczby zewnętrznych i wewnętrznych stopni swobody n -tego rowerzysty.

Załóżmy (analogicznie jak dla podukładu tłumy), że dla każdego n -tego rowerzysty znane są aktualne składowe położenia, odniesione do lokalnego układu współrzędnych związanego z pomostem kładki oraz prędkości lokomocji wyliczone z rozwiązania odrębnych równań lokomocji podukładu peletonu (zob. rozdz. 4.2.2). Ponadto dla każdego n -tego rowerzysty jest znana macierz transformacji $\mathbf{T}_{[n]}$:

$$\mathbf{x}_{o[n]}(t) = \mathbf{T}_{[n]} \begin{bmatrix} \xi_{[n]}(t) \\ \eta_{[n]}(t) \end{bmatrix} \mathbf{x}_s(t), \quad \mathbf{F}_{B[n]}(t) = \mathbf{T}_{[n]}^T \mathbf{R}_{o[n]} \quad (41)$$

gdzie uwzględniając (40), można zapisać:

$$\mathbf{x}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{[1]} \\ \vdots \\ \mathbf{T}_{[L_b]} \end{bmatrix} \mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{os[1]} & \mathbf{T}_{ob[1]} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{T}_{os[L_b]} & \mathbf{T}_{ob[L_b]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{Bs} \\ \mathbf{f}_{Bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{so[1]} \cdots \mathbf{T}_{so[L_b]} \\ \mathbf{T}_{bo[1]} \cdots \mathbf{T}_{bo[L_b]} \end{bmatrix} \mathbf{R}_o \quad (42)$$

W powyższym wzorze (42) ujawnia się struktura macierzy \mathbf{T} , przy czym $\mathbf{T}_{ob[n]} = \mathbf{T}_{bo[n]}^T$ oraz $\mathbf{T}_{os[n]} = \mathbf{T}_{so[n]}^T$, $n = 1, \dots, L_b$. Wobec tego prawdziwe są dla każdego n -tego rowerzysty wzory analogiczne do równań (16)–(19) – należy tu jednak zamiast macierzy $\mathbf{Z}_{[n]}$ wstawić $\mathbf{T}_{[n]}$, a wektor $\mathbf{x}_{f[n]}$ zastąpić $\mathbf{x}_{o[n]}$.

Przy tak dokonanym rozdzieleniu zmiennych w (40) poszczególne podmacierze macierzy sztywności \mathbf{K}_B w (36) wyrażają się wzorami:

$$\mathbf{K}_{rr} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{rr[1]} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_{rr[L_b]} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{oo} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{oo[1]} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_{oo[L_b]} \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\mathbf{K}_{ro} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ro[1]} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_{ro[L_b]} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{ro} = \mathbf{K}_{or}^T \quad (44)$$

Analogicznie zbudowane są podmacierze macierzy \mathbf{C}_B i bezwładności \mathbf{M}_B podukładu peletonu – wzór (36).

4.2.2. Równanie lokomocji peletonu

Odrębnej dyskusji wymaga opis lokomocji peletonu. W odróżnieniu od złożonego modelu lokomocji tłumy, autor nie napotkał w literaturze przedmiotu modelu opisującego lokomocję grupy rowerzystów. Można tu zaproponować najprostszą zależność, że kierunek ruchu wszystkich rowerzystów wytycza podłużna oś η układu współrzędnych związanego z pomostem kładki, a prędkość każdego rowerzysty pozostaje stała. Wobec tego:

$$\dot{\xi}_{[n]}(t) = 0, \quad \dot{\eta}_{[n]}(t) = v_{0[n]} \quad \forall n = 1, \dots, L_b \quad (45)$$

Aktualne położenie n -tego rowerzysty określają ogólne wzory:

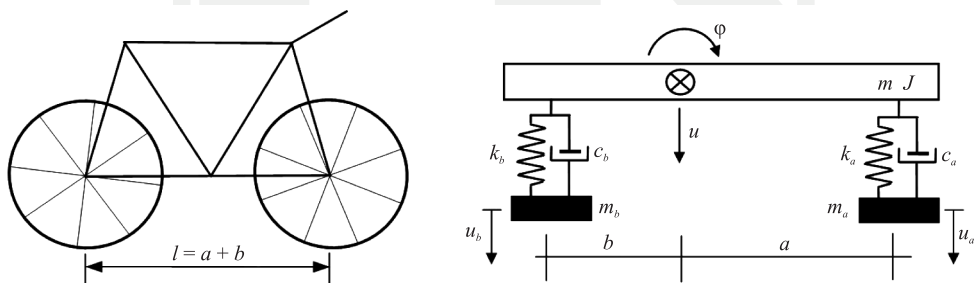
$$\xi_{[n]}(t) = \int_0^t \dot{\xi}_{[n]}(\tau) d\tau, \quad \eta_{[n]}(t) = \int_0^t \dot{\eta}_{[n]}(\tau) d\tau \quad \forall n = 1, \dots, L_b \quad (46)$$

Po scałkowaniu (45) otrzymuje się najprostsze relacje liniowego przyrostu drogi w czasie:

$$\xi_{[n]}(t) = \xi_{0[n]}, \quad \eta_{[n]}(t) = v_{0[n]}t + \eta_{0[n]} \quad \forall n = 1, \dots, L_b \quad (47)$$

4.2.3. Uproszczony model dynamiczny rowerzysty

Najprostszy model roweru i rowerzysty pokazano na rys. 6. Założono, że rowerzysta oraz rama roweru stanowią razem sztywną, płaską tarczę, której równania ruchu można zapisać w środku jej ciężkości. Przy powziętym założeniu pozostaje stały w czasie rozkład mas oraz masowy moment bezwładności – prowadzi to do stacjonarnego równania ruchu. Elementy sprężysto-tłumiące opisują w sposób liniowy własności fizyczne pneumatycznego ogumienia kół. Prezentowany model w uproszczeniu odwzorowuje schemat konstrukcyjny roweru kolarskiego⁶. Jak pokazano na przywołanym rysunku, parametrami modelu są: masa m i masowy moment bezwładności J układu rowerzysta–rower, parametry sprężysto-tłumiące związane z ogumieniem oraz w ogólności masy m_a, m_b , jako części opon wchodzące bezpośrednio w kontakt z pomostem – masy te można przyjąć także jako równe zero (wówczas wektor $\mathbf{p}_{o[n]}$ i macierz $\mathbf{M}_{oo[n]}$ pozostają puste) – co upraszcza ostatecznie układ równań ruchu (68) – patrz rozdz. 6.



Rys. 6. Uproszczony model dynamiczny roweru

Fig. 6. Scheme of the most simplified dynamic model of a bicycle

⁶ Dla ram (np. współczesnych rowerów sportowych lub górskich), które jako elementy konstrukcyjne zawierają amortyzatory i tłumiki, należy przedstawić model rozbudować.

Poniżej przedstawiono strukturę macierzy rozważanego modelu dynamicznego roweru:

$$\mathbf{M}_{rr[n]} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{oo[n]} = \begin{bmatrix} m_a & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{ro[n]} = \mathbf{0} \quad (48)$$

$$\mathbf{C}_{rr[n]} = \begin{bmatrix} c_a + c_b & ac_a - bc_b \\ \text{sym.} & a^2c_a + b^2c_b \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{oo[n]} = \begin{bmatrix} c_a & 0 \\ 0 & c_b \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{ro[n]} = \begin{bmatrix} -c_a & -c_b \\ -ac_a & -bc_b \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\mathbf{K}_{rr[n]} = \begin{bmatrix} k_a + k_b & ak_a - bk_b \\ \text{sym.} & a^2k_a + b^2k_b \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{oo[n]} = \begin{bmatrix} k_a & 0 \\ 0 & k_b \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{ro[n]} = \begin{bmatrix} -k_a & -k_b \\ -ak_a & -bk_b \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\mathbf{p}_{rr[n]} = \begin{bmatrix} mg + P_u \\ M_\varphi \end{bmatrix}, \mathbf{p}_{o[n]} = \begin{bmatrix} m_a \\ m_b \end{bmatrix} \mathbf{g}, \mathbf{x}_{r[n]} = \begin{bmatrix} u \\ \varphi \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{o[n]} = \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix}, \mathbf{R}_{o[n]} = \begin{bmatrix} R_a \\ R_b \end{bmatrix} \quad (51)$$

Zaproponowany model rowerzysty jest liniowy, stacjonarny i nie uwzględnia sprężenia ruchu konstrukcji z prawem lokomocji. Ponadto jest modelem płaskim generującym jedynie reakcje prostopadłe do pomostu (brak składowych poziomych wzdłuż kierunku ruchu i prostopadłych do niego). Dlatego też uzasadnione jest przyjęcie najprostszego, jednowymiarowego opisu lokomocji rowerzysty przedstawionego w rozdz. 4.2.2.

5. Podukład mechanicznych tłumików drgań

Równania ruchu podukładu mechanicznych tłumików drgań (TMDs) można zapisać w postaci (52):

$$\mathbf{M}_T \ddot{\mathbf{x}}_T(t) + \mathbf{C}_T \dot{\mathbf{x}}_T(t) + \mathbf{K}_T \mathbf{x}_T(t) = \mathbf{P}_T(t) + \mathbf{R}_T(t) \quad (52)$$

gdzie wektor $\mathbf{x}_T(t)$ oznacza przemieszczenia podukładu, które rozdzielono na wewnętrzne stopnie swobody $\mathbf{x}_i(t)$ i zewnętrzne $\mathbf{x}_a(t)$ – związane z miejscami połączeń elementów sprężystych i dysypatywnych z konstrukcją kładki, w których zapisuje się warunki zgodności przemieszczeń. Analogicznie do (2) dokonano rozdziału zmiennych:

$$\mathbf{x}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_a \end{bmatrix}, \mathbf{P}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_a \end{bmatrix}, \mathbf{R}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}_a \end{bmatrix} \quad (53)$$

oraz konsekwentnie (jak w (3)) rozdzielono macierze:

$$\mathbf{M}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ia} \\ \mathbf{M}_{ai} & \mathbf{M}_{aa} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii} & \mathbf{C}_{ia} \\ \mathbf{C}_{ai} & \mathbf{C}_{aa} \end{bmatrix}, \mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ia} \\ \mathbf{K}_{ai} & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix} \text{ i } (\bullet)_{ia} = (\bullet)_{ai}^T \quad (54)$$

Wymienione macierze są symetryczne, stacjonarne, a podmacierz \mathbf{K}_{tt} jest dodatkowo określona. Po uwzględnieniu w (52) zależności (53) (54) oraz rozwinięciu można zapisać równania analogiczne do (8) z tym, że należy tu zmienić odpowiednie indeksy, mianowicie: indeks p zastąpić indeksem f , a indeks f – indeksem a . Interpretacja powstałego układu równań jest identyczna jak (8). Analogicznie do (8) rozważane tu równania ruchu TMDs zawierają przemieszczenia tym razem \mathbf{x}_a i ich pochodne, które są związane ze stopniami swobody kładki \mathbf{x}_s , poprzez macierz transformacji \mathbf{D} :

$$\mathbf{x}_a(t) = \mathbf{D}\mathbf{x}_s(t) \quad (55)$$

Z kolei siły interakcji zależą od macierzy \mathbf{D}^T :

$$\mathbf{F}_T(t) = \mathbf{D}^T \mathbf{R}_a(t) \quad (56)$$

Obie relacje (55) (56) opisują zgodność przemieszczeń i sił w punkcie zamocowania podukładu TMDs do konstrukcji kładki. Ponieważ punkty zamocowań nie zmieniają położenia, to macierz \mathbf{D} jest stała i nie zależy od czasu tzn. $\dot{\mathbf{D}} = \ddot{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$ – jest ona czysto geometryczną transformacją pomiędzy wektorami \mathbf{x}_a i \mathbf{x}_s . Zatem występujące we wzorach pochodne przemieszczeń \mathbf{x}_a dane są wzorami:

$$\dot{\mathbf{x}}_a = \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}_s, \quad \ddot{\mathbf{x}}_a = \mathbf{D}\ddot{\mathbf{x}}_s \quad (57)$$

Przedstawione równanie (52) jest formułą, do której można sprowadzić cały podukład złożony z L_t masowych tłumików drgań oraz pozostaje w mocy także dla każdego TMD. Równanie ruchu n -tego tłumika analogicznie do (52) można zapisać:

$$\mathbf{M}_{T[n]}\ddot{\mathbf{x}}_{T[n]} + \mathbf{C}_{T[n]}\dot{\mathbf{x}}_{T[n]} + \mathbf{K}_{T[n]}\mathbf{x}_{T[n]} = \mathbf{P}_{T[n]} + \mathbf{R}_{T[n]} \quad \forall n = 1, \dots, L_t \quad (58)$$

Mając na uwadze (53) (54), wprowadza się następujące uporządkowanie zmiennych:

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t[1]} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{t[L_t]} \end{bmatrix} \left\{ \sum_{n=1}^{L_t} N_{t[n]} \right\}, \quad \mathbf{x}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{a[1]} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{a[L_t]} \end{bmatrix} \left\{ \sum_{n=1}^{L_t} N_{a[n]} \right\}, \quad \mathbf{R}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{a[1]} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{a[L_t]} \end{bmatrix} \left\{ \sum_{n=1}^{L_t} N_{a[n]} \right\} \quad (59)$$

We wzorze (59) wielkości $N_{a[n]}$ oraz $N_{t[n]}$ oznaczają odpowiednio liczby zewnętrznych i wewnętrznych stopni swobody n -tego TMD.

Dla każdego n -tego TMD znana jest macierz transformacji $\mathbf{D}_{[n]}$:

$$\mathbf{x}_{a[n]}(t) = \mathbf{D}_{[n]}\mathbf{x}_s(t), \quad \mathbf{F}_{T[n]}(t) = \mathbf{D}_{[n]}^T \mathbf{R}_{a[n]} \quad (60)$$

gdzie uwzględniając (59), można zapisać:

$$\mathbf{x}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{[1]} \\ \vdots \\ \mathbf{D}_{[L_r]} \end{bmatrix} \mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{as[1]} & \mathbf{D}_{ab[1]} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{D}_{as[L_r]} & \mathbf{D}_{ab[L_r]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{Ts} \\ \mathbf{f}_{Tb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{sa[1]} \cdots \mathbf{D}_{sa[L_r]} \\ \mathbf{D}_{ba[1]} \cdots \mathbf{D}_{ba[L_r]} \end{bmatrix} \mathbf{R}_a \quad (61)$$

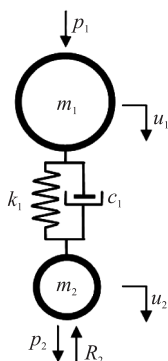
W powyższym wzorze (61) ujawnia się struktura macierzy \mathbf{D} , $\mathbf{D}_{ab[n]} = \mathbf{D}_{ba[n]}^T$ oraz $\mathbf{D}_{as[n]} = \mathbf{D}_{sa[n]}^T$, $n = 1, \dots, L_r$.

Przy tak dokonanym rozdziale zmiennych w (59) poszczególne podmacierze macierzy sztywności \mathbf{K}_T w (54) wyrażają się wzorami:

$$\mathbf{K}_{tt} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{tt[n]} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_{tt[L_r]} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{aa} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa[1]} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_{aa[L_r]} \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\mathbf{K}_{ta} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ta[1]} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_{ta[L_r]} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{ta} = \mathbf{K}_{at}^T \quad (63)$$

Analogicznie zbudowane są podmacierze tłumienia \mathbf{C}_T i bezwładności \mathbf{M}_T podukładu TMDs – wzór (54).



Rys. 7. Model dynamiczny mechanicznego tłumika drgań

Fig. 7. Dynamic model of TMD

5.2. Model dynamiczny TMD

Model masowego tłumika drgań przedstawiono na rys. 7. Siły p_1 i p_2 oddziałują odpowiednio na masy m_1 i m_2 – mogą one być związane np. z ciężarem tych mas. Masa m_2 jest elementem, który mocuje się do konstrukcji kładki – stąd w tym punkcie działa reakcja R_2 . Zgodnie z metodyką tu przedstawioną, poszczególne wektory i macierze n -tego tłumika mają następującą strukturę:

$$\mathbf{M}_{tt[n]} = [m_1], \mathbf{M}_{aa[n]} = [m_2], \mathbf{M}_{ta[n]} = 0 \quad (64)$$

$$\mathbf{M}_{tt[n]} = [c_1], \mathbf{C}_{aa[n]} = [c_1], \mathbf{C}_{ta[n]} = [-c_1] \quad (65)$$

$$\mathbf{K}_{tt[n]} = [k_1], \mathbf{K}_{aa[n]} = [k_1], \mathbf{K}_{ta[n]} = [-k_1] \quad (66)$$

$$\mathbf{p}_{t[n]} = [p_1], \mathbf{p}_{a[n]} = [p_2], \mathbf{x}_{t[n]} = [u_1], \mathbf{x}_{a[n]} = [u_2], \mathbf{R}_{a[n]} = [R_2] \quad (67)$$

6. Interakcja kładka-tłumiki-ruchome obciążenie inercyjne

Dynamika całego układu obejmującego interakcje wszystkich opisanych podukładów dana jest równaniem (68):

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}(t)\mathbf{q}_b(t) \quad (68)$$

Powstaje ono przez podstawienie do (4) sił interakcji oraz zgodności przemieszczeń podukładów, a także po uporządkowaniu niewiadomych. Dalej przedstawiono strukturę macierzy i wektorów tego równania:

– wektor niewiadomych i wektory prawych stron:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_r \end{bmatrix}, \mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_s + \mathbf{D}_{sa}\mathbf{p}_a + \mathbf{Z}_{sf}\mathbf{p}_f + \mathbf{T}_{so}\mathbf{p}_o \\ \mathbf{P}_t \\ \mathbf{P}_p \\ \mathbf{P}_r \end{bmatrix}, \mathbf{q}_b(t) = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_b \\ \dot{\mathbf{x}}_b \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} \quad (69)$$

– macierz bezwładności:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{13} & \mathbf{M}_{14} \\ \mathbf{M}_{12}^T & \mathbf{M}_{tt} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{13}^T & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{pp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{14}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{rr} \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$\mathbf{M}_{11} = \mathbf{M}_{ss} + \mathbf{D}_{sa}\mathbf{M}_{aa}\mathbf{D}_{as} + \mathbf{Z}_{sf}\mathbf{M}_{ff}\mathbf{Z}_{fs} + \mathbf{T}_{so}\mathbf{M}_{oo}\mathbf{T}_{os} \quad (71)$$

$$\mathbf{M}_{12} = \mathbf{D}_{sa}\mathbf{M}_{at}, \mathbf{M}_{13} = \mathbf{Z}_{sf}\mathbf{M}_{fp}, \mathbf{M}_{14} = \mathbf{T}_{so}\mathbf{M}_{or} \quad (72)$$

– macierz tłumienia:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} & \mathbf{C}_{14} \\ \mathbf{C}_{12}^T & \mathbf{C}_{tt} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{31} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{pp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{41} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{rr} \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$\mathbf{C}_{11} = \mathbf{C}_{ss} + \mathbf{D}_{sa}\mathbf{C}_{aa}\mathbf{D}_{as} + \mathbf{Z}_{sf}(2\mathbf{M}_{ff}\dot{\mathbf{Z}}_{fs} + \mathbf{C}_{ff}\mathbf{Z}_{fs}) + \mathbf{T}_{so}(2\mathbf{M}_{oo}\dot{\mathbf{T}}_{os} + \mathbf{C}_{oo}\mathbf{T}_{os}) \quad (74)$$

$$\mathbf{C}_{12} = \mathbf{D}_{sa} \mathbf{C}_{at}, \quad \mathbf{C}_{13} = \mathbf{Z}_{sf} \mathbf{C}_{fp}, \quad \mathbf{C}_{14} = \mathbf{T}_{so} \mathbf{C}_{or} \quad (75)$$

$$\mathbf{C}_{31} = 2\mathbf{M}_{pf} \dot{\mathbf{Z}}_{fs} + \mathbf{C}_{13}^T, \quad \mathbf{C}_{41} = 2\mathbf{M}_{ro} \dot{\mathbf{T}}_{os} + \mathbf{C}_{14}^T \quad (76)$$

– macierz sztywności:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{41} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{K}_{ss} + \mathbf{D}_{sa} \mathbf{K}_{aa} \mathbf{D}_{as} + \mathbf{Z}_{sf} (\mathbf{M}_{ff} \ddot{\mathbf{Z}}_{fs} + \mathbf{C}_{ff} \dot{\mathbf{Z}}_{fs} + \mathbf{K}_{ff} \mathbf{Z}_{fs}) + \mathbf{T}_{so} (\mathbf{M}_{oo} \ddot{\mathbf{T}}_{os} + \mathbf{C}_{oo} \dot{\mathbf{T}}_{os} + \mathbf{K}_{oo} \mathbf{T}_{os}) \quad (78)$$

$$\mathbf{K}_{12} = \mathbf{D}_{sa} \mathbf{K}_{at}, \quad \mathbf{K}_{13} = \mathbf{Z}_{sf} \mathbf{K}_{fp}, \quad \mathbf{K}_{14} = \mathbf{T}_{so} \mathbf{K}_{or} \quad (79)$$

$$\mathbf{K}_{31} = \mathbf{M}_{pf} \ddot{\mathbf{Z}}_{fs} + \mathbf{C}_{pf} \dot{\mathbf{Z}}_{fs} + \mathbf{K}_{13}^T, \quad \mathbf{K}_{41} = \mathbf{M}_{ro} \ddot{\mathbf{T}}_{os} + \mathbf{C}_{ro} \dot{\mathbf{T}}_{os} + \mathbf{K}_{14}^T \quad (80)$$

– macierz obciążenia kinematycznego:

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{11} & \mathbf{q}_{12} & \mathbf{q}_{13} \\ \mathbf{q}_{21} & \mathbf{q}_{22} & \mathbf{q}_{23} \\ \mathbf{q}_{31} & \mathbf{q}_{32} & \mathbf{q}_{33} \\ \mathbf{q}_{41} & \mathbf{q}_{42} & \mathbf{q}_{43} \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$\mathbf{q}_{11} = \mathbf{M}_{sb} + \mathbf{D}_{sa} \mathbf{M}_{aa} \mathbf{D}_{ab} + \mathbf{Z}_{sf} \mathbf{M}_{ff} \mathbf{Z}_{fb} + \mathbf{T}_{so} \mathbf{M}_{oo} \mathbf{T}_{ob} \quad (82)$$

$$\mathbf{q}_{12} = \mathbf{C}_{sb} + \mathbf{D}_{sa} \mathbf{C}_{aa} \mathbf{D}_{ab} + \mathbf{Z}_{sf} (\mathbf{M}_{ff} \dot{\mathbf{Z}}_{fb} + \mathbf{C}_{ff} \mathbf{Z}_{fb}) + \mathbf{T}_{so} (\mathbf{M}_{oo} \dot{\mathbf{T}}_{ob} + \mathbf{C}_{oo} \mathbf{T}_{ob}) \quad (83)$$

$$\mathbf{q}_{13} = \mathbf{K}_{sb} + \mathbf{D}_{sa} \mathbf{K}_{aa} \mathbf{D}_{ab} + \mathbf{Z}_{sf} (\mathbf{M}_{ff} \ddot{\mathbf{Z}}_{fb} + \mathbf{C}_{ff} \dot{\mathbf{Z}}_{fb} + \mathbf{K}_{ff} \mathbf{Z}_{fb}) + \mathbf{T}_{so} (\mathbf{M}_{oo} \ddot{\mathbf{T}}_{ob} + \mathbf{C}_{oo} \dot{\mathbf{T}}_{ob} + \mathbf{K}_{oo} \mathbf{T}_{ob}) \quad (84)$$

$$\mathbf{q}_{21} = \mathbf{M}_{ta} \mathbf{D}_{ab}, \quad \mathbf{q}_{22} = \mathbf{C}_{ta} \mathbf{D}_{ab}, \quad \mathbf{q}_{23} = \mathbf{K}_{ta} \mathbf{D}_{ab}, \quad \mathbf{q}_{31} = \mathbf{M}_{pf} \mathbf{Z}_{fb} \quad (85)$$

$$\mathbf{q}_{32} = 2\mathbf{M}_{pf} \dot{\mathbf{Z}}_{fb} + \mathbf{C}_{pf} \mathbf{Z}_{fb}, \quad \mathbf{q}_{33} = \mathbf{M}_{pf} \ddot{\mathbf{Z}}_{fb} + \mathbf{C}_{pf} \dot{\mathbf{Z}}_{fb} + \mathbf{K}_{pf} \mathbf{Z}_{fb} \quad (86)$$

$$\mathbf{q}_{41} = \mathbf{M}_{ro} \mathbf{T}_{ob}, \quad \mathbf{q}_{42} = 2\mathbf{M}_{ro} \dot{\mathbf{T}}_{ob} + \mathbf{C}_{ro} \mathbf{T}_{ob}, \quad \mathbf{q}_{43} = \mathbf{M}_{ro} \ddot{\mathbf{T}}_{ob} + \mathbf{C}_{ro} \dot{\mathbf{T}}_{ob} + \mathbf{K}_{ro} \mathbf{T}_{ob} \quad (87)$$

Ostateczna przedstawiona powyżej postać macierzy wynika z wprowadzenia warunków interakcji pomiędzy poszczególnymi podukładami oraz założeniu idealnych, dwustronnych więzów. W ogólnym przypadku, na skutek istnienia ruchu unoszenia, pojawiają się siły Coriolisa skutkujące niesymetrią \mathbf{C} [16]. Z kolei w wyniku istnienia sił mających składnik śledzący pojawia się niesymetria \mathbf{K} . Ponadto macierze układu (68) są niestacjonarne – zależą bowiem od zmieniających się w czasie macierzy transformacji \mathbf{Z} i \mathbf{T} , które zawierają relacje

geometryczne przemieszczeń pomostu kładki oraz przemieszczeń ruchomych obciążeń inercyjnych pieszych i rowerzystów. Wymienione cechy sformułowania są charakterystyczne dla układów o zmiennej konfiguracji [13, 18].

Wyznaczenie w każdym kroku czasowym macierzy \mathbf{Z} i \mathbf{T} (i ich pochodnych) jest najtrudniejszym zadaniem w analizie drgań wywołanych ruchem obciążeń inercyjnych. Stosując MES jako metodę agregacji macierzy podukładu kładki, należy zauważyć, że konsekwencją zmiennych w czasie warunków zgodności jest zmienna struktura macierzy \mathbf{Z} i \mathbf{T} – punkty kontaktu „skaczą” z elementu na element. Stanowi to trudność w znalezieniu ogólnej metody różniczkowania tych macierzy.

7. Wnioski

W pracy przedstawiono teoretyczny opis interakcji ruchomych obciążeń inercyjnych pieszych i rowerzystów z kładką. Uwzględniono również podukład tłumików drgań. Wyprowadzone zależności pozwalają analizować odpowiedź konstrukcji przy jednoczesnym uwzględnieniu działania sił zmiennych w czasie i przestrzeni (np. wiatr), ruchomych obciążeń inercyjnych, działania masowych tłumików drgań oraz wymuszeń kinematycznych.

Do kompletnego opisu zjawiska należy dopisać do wyprowadzonych tu równań – dodatkowe zależności determinujące lokomocję pojedynczych pieszych i w konsekwencji tłumu (tzw. podukład tłumu – ang. *crowd subsystem*), które mogą być sprzężone lub nie z ruchem pomostu kładki. Przedstawione tu podejście umożliwia wprowadzenie podukładu tłumu niesprężonego z ruchem kładki, co pozwala na odrębne wyliczenie dla każdego pieszego parametrów $\xi_{[n]}(t)$, $\eta_{[n]}(t)$ i wprowadzenie podukładu do ostatecznego układu równań ruchu.

Zasadniczym problemem pozostaje efektywne wyznaczenie macierzy transformacji \mathbf{Z} i \mathbf{T} oraz ich pochodnych. Najczęściej stosowane modelowanie konstrukcji budowlanych przy użyciu elementów belkowych może stanowić dodatkowe utrudnienie. Z jednej strony analiza dynamiczna takich modeli jest szybka, z drugiej strony trudnością jest zbudowanie macierzy transformacji \mathbf{Z} i \mathbf{T} , ponieważ ruch pieszych (rowerów) odbywa się po pomoście, który najczęściej nie jest bezpośrednio odwzorowany w modelu belkowym.

Przedstawione sformułowanie teoretyczne jest obecnie aplikowane softwarowo. Z uwagi na znaczny koszt obliczeń konieczne staje się zastosowanie techniki obliczeń równoległych [26, 28], nie tylko w odniesieniu do rozwiązywania równań lokomocji, ale także do obliczeń dynamicznych związanych z wyznaczeniem odpowiedzi dla złożonego układu dynamicznego (68), zawierającego dynamikę inercyjnych układów ruchomych.

Literatura

- [1] Flaga A., *Mosty dla pieszych*, WKŁ, Warszawa 2011.
- [2] Leung A.Y.T., *Dynamic Stiffness and Substructures*, Springer-Verlag, London 1993.
- [3] Ming D., Kong Y., Wu Y., Ma J., *Substructure synthesis method for simulating large molecular complexes*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Vol. 100, Issue 1, The National Academy of Sciences, 2003. 104–109.

- [4] Moratal D. (ed.), Gonzales A., *Vehicle-Bridge Dynamic Interaction Using Finite Element Modelling in: Finite Element Analysis*, Sciyo, Croatia, 2010, Chapter, 637-662.
- [5] Caetano E., Cunha A., Raoul J., Hoorpah W., *Footbridge Vibration Design*, CRC Press, London 2009.
- [6] Collette F.S., *Tuned Mass Dampers for a suspended structure of footbridge and meeting boxes*, Footbridge 2002, Paris 2002.
- [7] Sedlacek G., Heinemeyer Chr., Butz Chr., Geradin M., and et. al. *Design of Lightweight Footbridges for Human Induced Vibrations*, Joint Report JRC-ECCS, JRC Scientific and Technical Reports, 2009.
- [8] Bachmann H., *Case studies of structures with man-induced vibrations*, Trans. ASCE, J. Struct. Engng, Vol. 118, 1992, 631-647.
- [9] Bachmann H., Ammann W., *Vibration in Structures Induced by Man and Machines*, International Association of Bridge and Structural Engineering, 1987.
- [10] Ho H., Wong S.C., *Two-dimensional continuum modeling approach to transportation problems*, Journal of Transportation Systems Eng. and Information Technology, No. 6, 2006, 53-72.
- [11] ISO 10137. *Bases for Design of Structures – Serviceability of Buildings and Walkways Against Vibrations*. ISO, 2007.
- [12] ISO 5982. *Vibration and shock-mechanical driving point impedance of human body*. ISO, 1981.
- [13] Kruszewski J., Sawik S., Wittbrodt E., *Metoda sztywnych elementów skończonych w dynamice konstrukcji*, WNT, Warszawa 1999.
- [14] Huang L., Wong S.C., Zhang M., Shu C.-W., Lam W.H.K., *Revisiting Hughes dynamic continuum model for pedestrian flow and the development of an efficient solution algorithm*, Transportation Research, Part B, Vol. 43, No. 1, 2009, 127-141.
- [15] Huang L., Xia Y., Wong S.C., Shu C.-W., Zhang M., Lam W.H. K., *Dynamic Continuum Model for Bi-directional Pedestrian Flows*, Engineering and Computational Mechanics, Vol. 162, Issue 2, 2009, 67-75.
- [16] Klasztorny M., *Dynamika mostów belkowych obciążonych pociągami szybkojeżdżnymi*, WNT, Warszawa 2005.
- [17] Klasztorny M., Langer J., *Dynamic response of single-span beam bridges to a series of moving loads*, Earthquake Engineering & Structural Dynamics, Vol. 19, Issue 8, 1990, 1107-1124.
- [18] Kleiber M. (red.), *Komputerowe metody mechaniki ciał stałych*, volume XI, PWN, Warszawa 1995.
- [19] Pelechano N., Malkawi A., *Comparison of Crowd Simulation for Building Evacuation and an Alternative Approach*, Proceedings: Building Simulation, 2007.
- [20] Pelechano N., Allbeck J.M., Badler N.I., *Controlling Individual Agents in High-Density Crowd Simulation*, ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation, San Diego, California 2007.
- [21] Pelechano N., O'Brien K., Silverman B., Badler N.I., *Crowd Simulation Incorporating Agent Psychological Models, Roles and Communication*, First International Workshop on Crowd Simulation. Crowds'05, 2005.
- [22] Pelechano N., Badler N.I., *Modeling Crowd and Trained Leader Behavior during Building Evacuation*, IEEE Computer Graphics and Applications, Vol. 26, Issue 6, 2006, 80-86.

- [23] Kim S., Cho K., Choi M., Lim J., *Development of Human Body Model for the Dynamic Analysis of Footbridges under Pedestrian Induced Excitation*, Steel Structures, No. 8, 2008, 333-345.
- [24] Matsumoto Y., Nishioka T., Shiojiri H., Matsuzaki K., *Dynamic design of footbridge*, IABSE Proceedings, No. P-17/78, 1987, 1-15.
- [25] Xiang Y., Chung H.J., Mathai A., Rahmatalla S., Kim J. et. al., *Optimization-based Dynamic Human Walking Prediction*, Digital Human Modeling Conference, SAE International, Seattle 2007.
- [26] Czech Z., *Wprowadzenie do obliczeń równoległych*, PWN, Warszawa 2010.
- [27] Parent R., *Animacja komputerowa. Algorytmy i techniki*, PWN, Warszawa 2012.
- [28] Karbowski A. (red.), *Obliczenia równoległe i rozproszone*, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa 2001.

