PRINCIPIA X-XI (1994)
ISSN 0867-5392

Thomas Tymoczko

Zróbmy miejsce matematykom w filozofii matematyki!

Przekład za: The Mathematical Intelligencer, *Vol. 8, N. 3 1986, ss. 44-50.*
Autor jest profesorem w Smith College, Northampton, Massachusetts.

Celem tego artykułu jest wykazanie, że pojęcie matematyka jest istotne dla filozofii matematyki. Nowość przedstawionego ujęcia polega na tym, iż zakłada się, że przedmiotem zainteresowania filozofii powinna być *społeczność* matematyków, a nie pojedynczy matematyk *w izolacji*. I tu niektórzy matematycy mogliby zdziwić się słysząc, że filozofia matematyki powinna w ogóle brać pod uwagę matematyków. Przyzwyczajeni są oni myśleć, że filozofia ta jest niemalże dziedziną badającą podstawy lub gałęzią logiki matematycznej. Przecież filozofia matematyki zwykle zajmuje się pojęciami liczb, zbiorów, funkcji rekurencyjnych, systemów formalnych, modeli itp. Zatem, gdzie tu jest miejsce dla matematyków?

Pojęcie matematyka ma znaczenie dla zagadnień poznania matematycznego, które to zagadnienia są podstawowe dla filozofii już od czasów Platona. Właśnie przekonanie Platona, że wiedza matematyczna jest wyróżniona i odmienna od wiedzy opartej na obserwacji, doprowadziło go do teorii idei. Podobnie, w sprawie dyskusji pomiędzy empiryzmem Hume'a a racjonalizmem Kartezjusza na ogół uważa się, że na korzyść racjonalistów przemawia ich uznanie wiedzy matematycznej za pewną i niepodważalną. Jednak, aby było poznanie muszą być zarówno ci, którzy poznają, jak i to, co jest poznawane. W przypadku matematyki, tych co poznają nazywamy „matematykami", a to co poznawane „twierdzeniami matematycznymi" lub „teoriami".

Filozofowie opracowują pewne idealizacje. Ważne jest wyjaśnienie ogólnych możliwości poznania, a nie poszczególnych pytań o to, kto, kiedy i co wie. Zatem filozofowie zakładają idealnego matematyka i wyjaśniają, jakie atrybuty musi on posiadać, aby poznawać matematykę. Mówi się, że na ile matematycy przybliżają się do pewnego ideału, na tyle poznają.

Zanim rozpatrzymy kwestię dotyczącą społeczności, wyjaśnijmy rolę matematyka w filozofii. Przeglądnijmy pokrótce wizerunki idealnych matematyków, zwykle związane z poszczególnymi szkołami filozofii matematyki. Według platonistów więc istnieje rzeczywistość przedmiotów matematycznych, która determinuje prawdziwość lub fałszywość każdego sądu matematycznego. Większość zagadnień platonistów dotyczy natury tej rzeczywistości, na przykład tego, czy jest ona złożona wyłącznie ze zbiorów spełniających aksjomaty ZF. Niemniej jednak po to, aby poprawnie wyjaśnić poznanie matematyczne, platonista musi wyjaśnić (co najmniej idealnie), jak matematycy mogą rozpoznać prawdziwość lub fałszywość zdań matematycznych. Jak wiadomo, wyjaśniają to oni poprzez „intuicję matematyczną". Matematyk ma specjalną zdolność, która umożliwia mu bezpośrednio, intuicyjnie uchwycić fakty rzeczywistości matematycznej. Idealny matematyk ma doskonałą, nieomylną i wyczerpującą intuicję.[1*] Poszczególni matematycy przybliżają się do tego ideału w różnym stopniu.

Wielu platonistów nie zgodziłoby się z tezą, że całe poznanie matematyczne bazuje na bezpośredniej intuicji; przyznaliby, że większa jego część opiera się na dowodach. Nie potrzebna jest intuicja dla prześledzenia dowodu będącego czysto logicznym przekształceniem. Intuicja jest zawężana do podstawowego poznania aksjomatów, na których dowody się opierają.

Jednakże wielu uznaje nawet tą zawężoną koncepcje intuicji za wadę platonizmu; wydaje się ona być rozwiązaniem ad hoc. Logicyści czy konceptualiści próbują usunąć tę wadę poprzez ugruntowanie całości wiedzy matematycznej w dowodach. Same aksjomaty matematyczne mogą być wyprowadzone z bardziej podstawowych zasad logicznych. Zasady te pełnią rolę aksjomatów, ale nie są poznawane

---

* Przypisy zamieszczono na końcu artykułu.

przez intuicję. Są bezwzględnie ogólne i występują w każdym racjonalnym myśleniu. W konsekwencji, aksjomaty logiczne są osiągalne dla dowolnego podmiotu racjonalnego. Według logicystów, idealny matematyk jest po prostu idealnym podmiotem racjonalnym. Nie muszą zakładać, że istnieje jakaś tajemnicza władza umysłu w rodzaju intuicji matematycznej.

Logicyzm natrafia jednak na trudność, kiedy próbuje określić podstawowe zasady logiki. Pierwotne, naturalne zasady, jak to niezależnie wykazali Frege i Cantor, są ze sobą niespójne. Założenia logiki sięgające poza rachunek kwantyfikatorów zaczynają wydawać się coraz bardziej dowolne. Formaliści i konwencjonaliści próbują poradzić sobie z tą sytuacją. Idealny matematyk, mówią, jest obdarzony zdolnością swobodnego wyboru; czyni przedmiotem swego badania dowolnie wybrany system aksjomatów. Po dokonaniu początkowego wyboru, całe matematyczne poznanie jako takie jest już tylko prawomocną dedukcją formalną w danym systemie formalnym. Zatem, poza dokonywaniem wyborów, idealny matematyk musi jedynie być zdolny do prowadzenia dedukcji formalnej. Nic dziwnego, że idealny matematyk formalizmu jest często charakteryzowany jako bawiący się znaczkami.

Niestety, formalne systemy są arbitralne. Jak już dawno zauważył Quine, jeśli matematyka byłaby tylko badaniem systemów formalnych, to sformalizowana teoria mitologii greckiej stanowiłaby gałąź matematyki[2]. Intuicjonizm, ta dziwna filozofia matematyki pochodząca z Holandii, utrzymuje, że systemy formalne są zbyt dowolne, aby ugruntować wiedzę. Intuicjonizm zgadza się z logicyzmem, że poznanie matematyczne zasadza się na dowodach lub, jakby powiedzieli, na konstrukcjach. Ale zaprzecza, że rachunek predykatów wyczerpuje wszelkie dziedziny matematyki. Z drugiej strony, intuicjoniści zgadzają się z platonistami, że istnieje rzeczywistość matematyczna dostępna dla intuicji matematycznej. Zaprzeczają jednak, że ta rzeczywistość jest i czeka na odkrycie, a w zamian uznają, że jest konstruowana przez samych matematyków. Rzeczywiście, wydaje się, że kładąc nacisk na „podmiot twórczy" intuicjonizm, spośród wszystkich głównych filozofii, najbardziej jest wyczulony na rolę matematyków.

Z tego przeglądu widzimy, że pojęcie matematyka w filozofii matematyki występuje co najmniej implicite. Ponadto, różnice między wyobrażeniami na temat idealnego matematyka dobrze pokazują różnice pomiędzy głównymi kierunkami filozofii matematyki. Niemniej jednak, pomimo różnic w tych wizerunkach, dają się zauważyć pewne cechy wspólne. Na przykład, zwykle zakłada się, że idealni matematycy są nieomylni, wieczni lub aczasowi, z nieograniczoną pamięcią oraz izolowani od innych matematyków, że są istotami psychicznymi pozbawionymi aspektu fizycznego. Łatwo wskazać niektóre konsekwencje logiczne takich idealizacji. Jeśli idealni matematycy są nieomylni, to możliwość błędu w matematyce jest wyeliminowana z filozofii matematyki. O ile konkretni matematycy się *mylą*, o tyle nie udaje im się przybliżyć do idealnych matematyków, a zatem filozofia się nimi nie interesuje. Rozpatrzmy inny przypadek: jeśli idealni matematycy są po prostu umysłami oddzielonymi od fizycznego kontekstu, to w filozofii można dokładnie wyznaczyć granicę pomiędzy matematyką czystą a stosowaną. Matematyka czysta jest tym, co jest dostępne matematykowi idealnemu. Matematyka stosowana opisuje sposób w jaki idealny *naukowiec*, poprzez obserwację i eksperyment, posługuje się matematyką czystą w swych teoriach naukowych.

Jednakże, nie wszystkie cechy charakterystyczne, które zwykle przypisuje się idealnemu matematykowi, są względem siebie niezależne. Twierdzę, że podstawowe jest założenie mówiące, iż idealny matematyk jest oddzielony od każdego innego matematyka. Założenie to oznacza w istocie, że istnieje jeden i tylko jeden matematyk idealny. Jeśli przyjmiemy pojedynczego idealnego matematyka, to inne określenia otrzymamy w sposób naturalny. Na przykład, skoro jest tylko jeden idealny matematyk m, to możemy równie dobrze przyjąć, że m jest odwieczny lub aczasowy, a śmierć tego idealnego matematyka jest końcem matematyki i jej filozofii. Podobnie, skoro jest jeden idealny matematyk, to równie dobrze możemy przyjąć, że m jest nieomylny. Gdyby m był omylny, to jak m mógłby zabezpieczyć się przed potencjalnymi błędami – czy poprzez sprawdzanie wszystkiego dwukrotnie? (3-krotnie?, 4-krotnie?, n-krotnie?).

Założenie pojedynczego idealnego matematyka wywiera istotny wpływ na to, jak filozofia konceptualizuje matematykę i matematyków, ale przecież możemy nie przyjmować tego założenia. Dla przeprowadzenia idealizacji matematyka i dostarczenia filozofii odpowiedniego pojęcia, nie jest konieczne idealizowanie go jako istniejącego w izolacji. Jest logicznie możliwe usytuowanie idealnego matematyka w społeczności matematycznej, jeśli tylko dopuścimy możliwość idealnych społeczności matematycznych. Matematyka staje się wówczas przedsięwzięciem zbiorowym. Matematycy, nawet idealni są w stanie uprawiać i znać matematykę tylko przez uczestnictwo w społeczności matematycznej. Chcę zwrócić uwagę na to, że założenie idealnej matematycznej społeczności jest koniecznym pierwszym krokiem w rekonstrukcji filozofii matematyki.[3]

Rozumowanie swoje przedstawię w dwóch częściach, z których każda będzie miała na celu wykazanie pożyteczności publicznych lub zorientowanych na społeczność teorii matematyki. Część pierwsza dotyczy nauczania matematyki. Oczywiście teorie pojedynczego podmiotu poznania (private theory)[4], czy zorientowane na jednostkę, nie są w stanie wyjaśnić na czym ono polega, a tym samym wykluczają je z kręgu poważnych zagadnień filozofii matematyki. Równie oczywiste jest, że teorie zbiorowego podmiotu poznania (public theory) mogą wyjaśnić na czym polega nauczanie; trzeba tu wykazać jednak, iż nauczanie rzeczywiście zasługuje na poważne potraktowanie w filozofii matematyki. Druga część dotyczy tematu, który ma wyraźne znaczenie dla filozofii matematyki: pojęcia dowodu oraz praktyki dowodzenia. Będę chciał tutaj wykazać, że teorie zbiorowego podmiotu poznania podają lepsze wytłumaczenie tego, na czym polega dowodzenie niż teorie pojedynczego podmiotu.

Nauczanie a społeczność matematyczna

Wcześniej zauważyliśmy, że teorie pojedynczego podmiotu zakładają idealnego matematyka m, który jest odwieczny lub aczasowy. Jeśli m zniknie, to matematyka wraz z nim. Z drugiej strony, teoria zbiorowego podmiotu idealnej matematycznej społeczności nie musi zakładać tego, że każdy jej uczestnik jest odwieczny. Społeczność może przetrwać straty starych członków tak długo, jak długo zabezpiecza się wprowadzając nowych. Rzeczywiście, z formalnego punktu widzenia, procedury wprowadzania nowych członków są cechą charakterystyczną idealnej matematycznej społeczności. Te procedury są częścią tego, co umożliwia społeczności trwanie pomimo zmian jej członków. Procedury wprowadzania nowych członków w każdej społeczności matematycznej są w większej części determinowane przez jej praktyki kształcenia. Trwanie zatem społeczności w czasie jest ściśle związane z jej procesem nauczania. Nic więc dziwnego, że nauczanie jest ważne dla epistemologii zbiorowego podmiotu poznania.

Z punktu widzenia zdrowego rozsądku, myśl, że kształcenie matematyków ma znaczenie dla filozoficznego rozumienia matematyki, wydaje się zupełnie oczywista. Rzeczywiście, pierwsze doświadczenie matematyczne większości matematyków ma miejsce podczas nauczania i uczenia się: wszyscy oni zostali wprowadzeni do swych społeczności przez swoich nauczycieli. Poza tym, większość matematyków sporą część swego czasu poświęca nauczaniu. Źródłem utrzymania matematyków jest uczenie matematyki; w ten sposób zarabiają oni pieniądze.[5]

Jednakże, z perspektywy epistemologii pojedynczego podmiotu próby związania uczenia z filozofią są wyklęte. Prywatna teoria jednego matematyka nie może nawet opisać nauczania, a co dopiero je wyjaśnić. Po prostu, nie ma większego sensu w tym, żeby jeden matematyk w izolacji uczył siebie lub uczył się od siebie (co najwyżej może zdobywać więcej wiedzy). Stąd, każdy zwolennik teorii pojedynczego podmiotu poznania musi wykluczyć kształcenie jako poważną kwestię w filozofii. Choć nie jest moim celem zaoferowanie jakiejś odpowiedniej teorii nauczania, to chciałbym pokazać, jak taka teoria mogłaby wpłynąć na całościowe rozumienie matematyki.

To, że matematyka jest wzbogacana przez nauczanie jest oczywiste, natomiast nowością jest moje twierdzenie, że nauczanie ma znaczenie dla filozofii matematyki.[6] Rozpatrzmy to twierdzenie stosując je do przetestowania kilku znanych poglądów dotyczących matematyki. Weźmy stanowisko zakładające istnienie podstawowych czy fundamentalnych działów matematyki. Z punktu widzenia filozofii zajmującej się podstawami matematyki teoria mnogości z logiką, systemy formalne, teoria modeli i teoria rekurencji są jej podstawami. Jednakże, z perspektywy kształcenia otrzymujemy zupełnie inny podział. Podstawowymi dyscyplinami są elementarna algebra i geometria, analiza i algebra liniowa, jak również coraz częściej informatyka. Są to wspólne dziedziny, które kszałtują i ujednolicają praktykę matematyczną zarówno uczniów i nauczycieli, jak i wszystkich specjalistów. Matematycy nie zgadzają się co do tego, czym są i jakie mają znaczenie aksjomaty teorii mnogości. Zgadzają się oni co do twierdzeń analizy, a na zebraniach dyskutują jak, i na podstawie których podręczników powinno się jej uczyć. Uważam, że takie dyskusje mogą tyle samo zaoferować filozofii, co odbywające się od czasu do czasu sympozja dotyczące podstaw matematyki. Rzeczywiście, na korzyść porządku kształcenia przemawia to, że wszystko, co tradycyjnie uważano za podstawy, zaczyna wyglądać jak nadbudowa.

Ponadto, to raczej praktyka nauczania, nie zaś czasopisma filozoficzne, może funkcjonować na podobieństwo sejsmografu, który wykrywać będzie każdy „wstrząs" w podstawach matematyki. Jestem na przykład przekonany, że informatyka, którą nieuchronnie wprowadza się do programu uczenia matematyki, wnosi ze sobą ponowne zwrócenie uwagi na kombinatorykę i matematykę finitystyczną.[7] Za zmiany te trzeba płacić (nie można przecież uczyć wszystkiego), sądzę więc, że w konsekwencji kładzie się mniejszy nacisk na bardziej abstrakcyjne i nieskończonościowe dziedziny klasycznej matematyki, takie jak teoria mnogości i topologia. Ten pobieżnie zarysowany przykład może nie jest zbyt precyzyjny, ale pokazuje, jak zasadnicze zmiany w kształceniu mogą wpływać na zasadnicze przeorganizowane całości. Po latach, zmiany te mogą być zauważone, uznane i „uprawomocnione" w czasopismach filozoficznych.

Zwykle czas matematyków dzieli się na uczenie i badanie. Nauczanie jest dla matematyków źródłem pieniędzy, a praca badawcza przynosi im prestiż. A jednak, niespodziewanie, perspektywa pedagogiczna może bardziej przyczynić się do lepszego zrozumienia odkrycia niż tradycyjne epistemologie pojedynczego podmiotu poznania. W przypadku koncepcji pojedynczego podmiotu, filozofia jest zmuszona ograniczyć swoje zainteresowania do sposobów sprawdzania dowodów. To uzasadnienie, a nie odkrycie, według wielkiego filozofa Fregego[8], jest zajęciem matematyków. W epistemologii pojedynczego podmiotu odkrycie w ogóle nie podlega wyjaśnianiu, jest zupełnie tajemnicze, zatem lepiej uznać je za nieistotne i pozostawić psychologii. Tradycyjne filozofie matematyki osiągają swą solidność, klarowność i rygor poprzez skupienie się na zawężonym polu weryfikacji dowodów. Gdy przychodzi do przeanalizowania odkrycia dowodu filozofie takie stają się mętne, jak najbardziej mętna estetyka, paplająca o twórczości, snach i szczęściu Poincaré do autobusów.[9]

Z drugiej strony, jak najbardziej ma sens mówienie o kształceniu twórczych matematyków. Czasami uwypukla się aspekt twórczy bardzo wyraźnie, na przykład prowadząc zajęcia w stylu Moore'a. Aspekt ten można również dostrzec, choć jest bardziej ukryty, w takich znanych koncepcjach, jak zajęcia, podczas których tak uczniom strukturalizujemy materiał, żeby sami mogli dokonać odkrycia; czy też *prespicuous organization*, gdy to oddzielamy lematy, twierdzenia i wnioski i w ten sposób uczymy studentów jak krok po kroku przybliżać się do odkrycia korzystając z odkryć wcześniejszych. W życzliwym otoczeniu uczących się nawet błędy mogą odgrywać pozytywną rolę. Tam błąd nie jest po prostu odejściem od prawdy (lub „grzechem", jak w epistemologii pojedynczego podmiotu poznania u Kartezjusza), ale okazją do dalszego rozwoju, zarówno poprzez rozpoznawanie błędów (odkrycie), jak i w przezwyciężanie ich (kolejne odkrycie). Mówiąc ogólnie, uczenie daje możliwość odpowiedzi na pytania dotyczące odkrycia matematycznego, podczas gdy tradycyjna filozofia takich pytań nie może nawet poprawnie postawić.

W końcu, gdy uznaliśmy, że nauczanie matematyki odgrywa ważną rolę dla filozofii matematyki, to możemy stwierdzić, że jednym z ważniejszych zagadnień stojących przed matematykami jest pytanie o to czego i jak uczyć. Poprzez rozpatrywanie tych pedagogicznych kwestii matematycy stają wobec podstawowego pytania: co jest celem matematyki? Wyrabiają umiejętność krytycznego myślenia i określają kształt społeczności matematycznej.

Sądzę, że epistemologia pojedynczego podmiotu poznania może wytyczyć matematykom tylko jeden cel, a mianowicie gołe zdobywanie wiedzy matematycznej. Ten cel jest często strojony we frazesy typu: „wiedza jest dobrem" lub „wiedza jest potęgą". Obawiam się jednakże, iż slogany te nie mogą zamaskować żenującego ubóstwa tej sytuacji, ubóstwa, które zdradza brak wszelkich krytycznych lub wartościujących składowych. Nie cała matematyka jest dobrą matematyką. Z drugiej strony, to co jest w powszechnym rozumieniu dobrą matematyką uwidacznia się w praktyce nauczania. Po to by uczyć, społeczność musi ocenić swą wiedzę, poddać ją krytyce, zdecydować które zagadnienia pominąć, a które odłożyć zupełnie do lamusa. Takie krytyczne i okrawające działania matematyków stają się współcześnie coraz ważniejsze z powodu eksplozji osiągnięć w matematyce i płodności jej teorii.[10] Rośnie przepaść pomiędzy tym, czego się uczy, a tym, co zostało (rzekomo) udowodnione. A zatem, z punktu widzenia społecznego modelu, jednym z celów matematyki jest przedstawienie w nauczaniu nowych osiągnięć. Teoretycznie, powinno być możliwe zakrojone na szeroką skalę i autentyczne propagowanie matematyki poprzez książki i artykuły, które zawierałyby nie tyle nowe rezultaty, co wyjaśniałyby i opracowywały dawniejsze wyniki w nowy, przystępny sposób. Co więcej, te teorie dotyczące matematyków, w których podmiotem poznania jest grupa, mogą wpłynąć na naszą koncepcję celu uprawiania matematyki, jak również na nasze oceny dokonań matematyków.

Twierdzę, że zwrócenie uwagi na uczenie matematyki może wpłynąć na nasze rozumienie matematyki. Wnioski mojego rozumowania są następujące: skoro nauczanie może dotyczyć tylko społeczności matematyków, to preferujemy epistemologię podmiotu zbiorowego, a nie pojedynczego. I tu tradycjonalista mógłby, na pierwszy rzut oka, poczuć się dotknięty. Zgoda – mógłby powiedzieć – że uczenie jest związane z praktyką matematyki, a nie z jej *filozofią*. Uczenie jest być może interesujące, ale dla socjologii, a nie dla filozofii. Cytując Fregego i innych klasyków, tradycjonalista może podkreślać, że filozofia spełni swoje zadania, jeśli będzie w stanie wyjaśnić jak matematycy *uzasadniają tezy poznania*. Uczyć jednakże można tylko tego, co się samemu wie, zatem trzeba najpierw odpowiedzieć na pytania dotyczące wiedzy, zanim będzie można postawić pytania o uczenie innych. Znaczącym zagadnieniem epistemologii jest wyjaśnienie jak matematycy dowodzą twierdzeń. Epistemologia podmiotu zbiorowego, chcąc umocnić swą pozycje, musi się zająć problemem dowodu. Zajmijmy się tym zagadnieniem i spróbujmy pokazać, co osiągniemy w tej kwestii przechodząc od dotyczących matematyków teorii podmiotu pojedynczego do teorii podmioty zbiorowego.

Teorie zbiorowego podmiotu poznania a istota dowodu

Uważam, że uzasadnianie wiedzy matematycznej i dowodzenie twierdzeń w swej istocie jest działalnością społeczną. Rozwija się ona jedynie w społeczności matematyków i należycie może być rozumiana tylko w epistemologii uznającej społeczność matematyczną. Teza, że uzasadnienie matematyczne jest aktywnością publiczną, nie implikuje tego, że żaden członek społeczności nie może sam przeprowadzić dowodu twierdzenia. Znaczy to raczej, że aktywność pojedynczego podmiotu wywodzi się z aktywności grupowej, lecz nie odwrotnie. Analogicznie – można prowadzić pamiętnik, mimo że pisanie i mówienie jest w swej istocie aktywnością społeczną. Rzeczywiście, ta analogia sugeruje bezpośredni argument na rzecz zbiorowego charakteru uzasadnienia matematycznego. Jest tak, ponieważ w uzasadnienie matematyczne angażujemy zdolność posługiwania się językiem matematyki. Jednakże, jak zauważył Quine, język jest umiejętnością społeczną, a według Wittgensteina i Kripkego niemożliwe jest istnienie języków prywatnych.[11] Stąd, język matematyczny musi być językiem publicznym. To pokazuje, że matematyczne uzasadnienie jest umiejętnością społeczną i potrzeba społeczności do jej uprawiania.

Tak zwany argument dotyczący języka prywatnego dokładnie omówiłem w innym miejscu[12], przedstawienie tutaj jego detali zbytnio odwiodłoby nas od zasadniczego tematu. Wystarczy nadmienić, że rozumowanie zasadza się na tym, iż matematyk w izolacji mógłby nie odróżnić tego, że ściśle przestrzega reguł, od tego, że jest przekonany, że je ściśle przestrzega. A zatem, tylko w społeczności praktyków można wykryć błędy i poddać je krytyce; liczą się całościowe dokonania grupy (choć dopuszczalne są indywidualne odstępstwa). W każdym razie, celem tego artykułu nie jest wskazanie, że dowody muszą bazować na społeczności, chcę jedynie tylko pokazać, że kontekst społeczny ma znaczenie dla pojęcia dowodu.

W kontekście społecznym, podstawowym pojęciem jest *dowodzenie* wyników matematycznych, przy czym jest ono pojmowane jako pewnego rodzaju działanie lub proces. Faktyczne czy idealne dowody są *wytworami* tych procesów.

Wydaje się, że najpełniejszą analizę dowodzenia z perspektywy społeczności matematycznej podał Imre Lakatos. Pozwolę sobie krótko przedstawić wyniki Lakatosa dotyczące dowodu, a następnie wyjaśnić ich związek ze społecznością.[13] Według Lakatosa, praktyka dowodzenia twierdzeń jest długotrwałym procsem. Wychodząc od hipotezy, matematycy rozpatrują idee dowodów, przekonujące, probabilistyczne rozumowania na rzecz hipotezy – dowody szkicowe. Jednakże, szkice te nie są pełnymi dowodami, nie pretendują do bycia przekonującymi argumentami. Idee dowodów są raczej podobne do eksperymentów myślowych. Najczęściej rozkładają hipotezę na zbiór lematów (hipotez pomocniczych). Idea dowodu łączy lematy w wyjściową hipotezę.

Idee dowodów nie są wprost przedmiotem krytyki, w zasadzie są niejako dopiero zaproszeniem do krytyki. Bez krytyki, idee dowodów nie mogą rozwinąć się w dowody. Krytyka często przybiera postać dostarczenia kontrprzykładów i Lakatos dzieli kontrprzykłady na dwa rodzaje: lokalne i globalne. Kontrprzykłady jako takie, są oczywiście również konstrukcjami matematycznymi, których ostateczne dowody matematyczne zaczynają się od idei dowodu itd. Kontrprzykłady lokalne falsyfikują lemat z idei dowodu, lecz nie wyjściową hipotezę. Wyjściowa hipoteza jest utrzymywana, ponieważ być może inna idea dowodu ją wesprze. Ponadto, wraz z wykryciem lokalnych kontrprzykładów, matematycy mogą przejrzeć inne lematy, by się przekonać, czy wśród nich nie ma jakichś interesujących twierdzeń. Globalne kontrprzykłady natomiast falsyfikują wyjściowe hipotezy, lecz nie lematy z idei dowodu! Dlatego wyjściowa idea dowodu jest utrzymywana. Być może jest ona ideą jakiegoś dowodu, mimo że nie dowodu tego, co na początku zamierzaliśmy udowodnić.

Kontrprzykłady zatem nie przerywają procesu dowodzenia, nawet jeśli dotyczą one idei dowodu. Przeciwnie, kontrprzykłady są impulsem dla dalszych odkryć. Hipoteza może być wysubtelniana w celu uchylenia globalnego kontrprzykładu. Ten proces poprawiania może być czymś naturalnym, oddaniem tego, co chcemy powiedzieć, ale zbyt niedbale to wyraziliśmy w pierwszym sformułowaniu; może też rodzić pytania lub zmiany definicji terminów w celu uniknięcia kontrprzykładu. Powtórzmy, idea dowodu może być modyfikowana w celu uchylenia niepożądanego kontrprzykładu. I tak, dowodzenie wydaje się być uszlachetnianiem hipotezy przez modyfikowanie idei dowodu. A to z kolei prowadzi nas do bardziej skomplikowanych kontrprzykładów i krytyk. Po akceptacji krytyki mogą pojawić się jeszcze bardziej wyrafinowane hipotezy i idee dowodów. I tak dalej, bez końca. Nawet jeśli idea dowodu rozwija się krok po kroku w poprawnej dedukcji systemu formalnego, zawsze jest możliwe podważenie niesprzeczności systemu, jego relewancji lub sposobu jego interpretacji.

Lakatos, tak jak go odczytałem, mówi, że dowód matematyczny jest mniej lub bardziej stałym wzorcem rozumowania, który jest wynikiem tego procesu i ma moc przekonywania ogromnej większości społeczności matematycznej. Skłania się on do rozpatrywania dowodów w kategoriach biologicznych takich jak wzrastanie w czasie lub osiąganie *dojrzałości* przez dowody. Dlaczego ujęcie dowodu według Lakatosa ma charakter publiczny? A w szczególności, jak jest w to uwikłana społeczność matematyczna? Jedną odpowiedź nasuwa sama forma jego wypowiedzi, którą jest dialog albo gra odbywająca się na lekcjach matematyki. Różni uczestnicy pełnią różne role w odkrywaniu danego dowodu. Na początku są pytający, którzy wydobywają interesujące zagadnienie, dalej pomysłodawcy, którzy stawiają ramowe hipotezy i idee dowodów, następnie formułujący wypowiedź, potem krytycy, którzy znajdują braki w wynikach, wreszcie ci, którzy te usterki usuwają i tak dalej. Matematyka jest grą zbiorową, a matematycy są drużyną zawodników. Pojedynczy matematyk niewątpliwie może uprawiać część matematyki samotnie, lecz może to robić dlatego, że przyswoił sobie społeczne reguły matematyki. Jeśli się nie mylę, to Lakatos odwraca platońskie dictum mówiące, że państwo jest rządem dusz. Według Lakatosa indywidualnym matematykiem rządzi społeczność matematyczna.

Jednakże, w poglądach Lakatosa można znaleźć głębsze uzasadnienie przemawiające na rzecz roli społeczności. Wynika ono z jego stanowiska Lakatosa podkreślającego, że (nieformalne) dowody wyrastają w reakcji na krytykę. Część takiej krytyki jest automatyczna. Są algorytmy sprawdzania dedukcji w teoriach formalnych, zatem pojedynczy matematyk może, w zasadzie, przeprowadzić ten rodzaj krytyki. Lecz większość krytyki nie jest automatyczna, w pierwszym rzędzie jest skierowana na wybór systemu formalnego, na jego interpretację i zastosowania. Tu właśnie potrzebujemy działania społeczności matematycznej dla uznania słuszności krytyki i dla ugruntowania przekonania. Być może byłoby inaczej, gdyby istniał jeden system dedukcyjny kodyfikujący całą matematykę. Jednakże, jak wiemy z pracy Gödla, taki system nie istnieje.[14]

Dlatego też na ogół matematyczne dowody, wyrażenia i inne konstrukcje posiadają pewną otwartość i elastyczność. Można je parafrazować, przeformułowywać i uzupełniać na różne sposoby; dlatego też mogą one być tłumaczone na dowolny system formalny. Można powiedzieć, że dowód nieformalny wyznacza otwartą klasę lub rodzinę, używając określenia Wittgensteina, bardziej uszczegółowionych dowodów. (Z perspektywy formalizmu, nieformalny dowód jest zawsze rozmytą wersją pewnego jednego tkwiącego u jego podstaw dowodu formalnego). Dla Putnama możliwość parafrazowania jest główną cechą charakterystyczną matematyki: „Moim zdaniem główną cechą charakterystyczną wyrażeń matematycznych jest to, że posiadają dużą ilość równoważnych sformułowań. Nie chodzi mi tylko o trywialny aspekt ilości (każde wyrażenie posiada oczywiście nieskończenie wiele równoważnych sformułowań); chodzi mi raczej o to, że wyjątkowo zdumiewająca jest liczba sposobów wyrażenia tego, co jest w pewnym sensie jednym faktem (jeśli to wyrażenie jest prawdziwe), podczas, gdy pozornie mówimy o różnych przedmiotach."[15]

Łatwo zauważyć, że to, co Putnam mówi o wyrażeniach, odnosi się równoprawnie do dowodów. W matematyce istnieje wiele różnych dróg dojścia do tego samego punktu. Takie nieformalne dowody nie tylko umacniają przekonania, ale mogą też prowadzić do nowych odkryć. Dowód formalny może być długi i złożony, nie można go łatwo bez błędu przepisać, a co dopiero zapamiętać i zastosować. Dowody nieformalne można umieścić w strukturach matematycznych na różnych poziomach specjalizacji. Przykładowo, wiele dowodów można po prostu zapisywać w kategoriach prostej (wprawdzie nie dokładnej) idei dowodu, naturalnego kontrprzykładu i chwytu uchylającego ten kontrprzykład. „Przepis" taki można wprowadzić w życie na wiele sposobów; różni matematycy mogą różnie uzupełniać szczegóły w tym samym bądź różnych systemach. W tym modelu, po to by uzupełnić dany dowód, matematycy mogliby bardziej zaufać wprawie niż pamięci. Co więcej, przepis taki można bardziej radykalnie przekształcić, można uczynić go mniej lub bardziej ogólnym, a w ogólnej postaci można go ponownie zastosować w innych kontekstach. Takie dowody są o wiele bardziej wiarygodne niż jakakolwiek konstrukcja pojedynczego podmiotu. Mogą one uchronić się od pomyłek w danej formalizacji, ponieważ jest ona wspierana przez wiele innych formalizacji. Taki pogląd na temat dowodu został również wyrażony przez De Millo, Liptona i Perlisa, którzy opierają go na podstawowym założeniu, że dowód jest wiadomością w społeczności matematycznej.[16] Mówiąc ogólnie, dowód jest tym, co przekonuje matematyków.

W ramach epistemologii podmiotu grupowego rozważanie dowodów w pojęciach biologicznych, jak proponuje Lakatos, nie jest nienaturalne. Dowody wzrastają w czasie. Z perspektywy filozoficznej należy podkreślić, że ten proces może trwać nieograniczenie długo. Dowody mogą się po prostu ciągle rozwijać. W zasadzie, stanowisko takie jest konieczne, aby zapobiec podejrzeniu, że istnieje jakiś wyróżniony ideał, według którego rozwijają się dowody, taki jak na przykład formalna dedukcja w teorii mnogości ZF. Dowody mogą stale się rozwijać, ponieważ są zawsze przedmiotem krytyki, a nasze pomysły krytyki podobnie jak zainteresowania i oceny, ciągle ewoluują. Jednym ze sposobów uwiarygodnienia tego poglądu jest chociażby uwzględnienie krytyki *estetycznej*. Łatwo sobie wyobrazić, że dowody zawsze będziemy mogli uatrakcyjniać, skoro ciągle się zmieniają standardy elegancji, a nowe pomysły matematyczne zawsze są dostępne. Ponadto sądzę, że godny uwagi jest pogląd, iż matematyczna krytyka może zawierać dwie składowe zarówno logiczną, jak i estetyczną – na przykład wtedy, gdy brzydki dowód nie jest przekonujący. Rzeczywiście wygląda na to, że konflikty w matematyce – również te wśród badaczy podstaw – czasami odwołują się do poczucia smaku estetycznego, z czego matematycy często zdają sobie sprawę. Dotychczas po prostu nie było wiadomo, co z tym zrobić. W epistemologii podmiotu grupowego można natomiast uchwycić estetyczny wymiar matematyki.[17]

Pomijając estetykę, jest filozoficznie ważne zwrócenie uwagi na fakt, że dowody nieformalne, w rozumieniu Lakatosa, mogą się rozwijać. Z matematycznego punktu widzenia jednakże, podkreślić trzeba, że po krótkim czasie proces ten może doprowadzić do względnej pewności matematycznej. Faktycznie rozumowanie Lakatosa opierało się na założeniu, że matematycy rzeczywiście dowodzą twierdzeń w postaci dowodów nieformalnych. Błędem byłoby sądzić, że Lakatos, czy w ogóle epistemolodzy uwzględniający podmiot grupowy proponują jakiś nowy rodzaj dowodu. Nieformalne dowody *są* faktycznymi dowodami praktyki matematycznej; kwestią sporną jest jak te dowody *interpretować*. Lakatos sugerował jedynie, że dla zrozumienia matematyki nie jest konieczne zastąpienie tych dowodów sformalizowanymi namiastkami, a ponadto, że gdybyśmy te zmiany dokonali, to wtedy większość matematyki stałaby się niezrozumiała. Był przekonany, że jego podejście do dowodu jest bardziej zgodne z praktyką matematyczną niż na przykład formalistyczna koncepcja dowodu. Lakatos oczywiście nie obiecywał pewności absolutnej, wiedział przecież, że nikt nie może dotrzymać takiej obietnicy.

Próbowałem pokazać, że pojęcie dowodu może być ujęte w ramach epistemologii podmiotu grupowego, gdy punktem wyjścia jest społeczność matematyków. Paradygmatyczne przykłady stanowią tu oczywiście faktyczne dowody z codziennej praktyki matematycznej. Zmienił się tylko zbiór pożytecznych filozoficznie pojęć potrzebnych do zrozumienia dowodów. Te pojęcia to hipoteza, idea dowodu, lemat, krytyka, kontrprzykład, dowód zmodyfikowany, wyrażenie równoważne, uogólnienie, zastosowanie, reinterpretacja i względy estetyczne. Propozycja takiego ujęcia w efekcie mogłaby zdecentralizować filozofię matematyki. Stąd refleksja filozoficzna w znacznej mierze musiałaby pojawić się lokalnie, w obrębie teorii grafów, równań różniczkowych, topologii algebraicznej itp. Nie ma powodu, dla którego mielibyśmy scedować filozofię matematyki na specjalistów w jednej tylko dziedzinie, nawet jeśli tą dziedziną jest teoria mnogości. Szczegóły tego programu z pewnością muszą jeszcze być dopracowywane, nadal pozostając kwestią filozoficzną.

Konkluzja

W eseju tym wyszliśmy od pojęcia matematyka i spostrzeżenia, że pojęcie to można idealizować na różne sposoby. Zarysowaliśmy podstawową różnicę pomiędzy koncepcjami pojedynczego i zbiorowego podmiotu poznania matematycznego. Z założenia, teorie pojedynczego podmiotu poznania dotyczące matematyków rozpatrują przypadki pojedynczego matematyka pracującego w izolacji. Teorie zbiorowego podmiotu poznania istotnie wykorzystują fakt, że matematycy pracują w społeczności. Twierdziliśmy, że tradycja zachęca do preferowania teorii pojedynczego podmiotu oraz, że współzawodnictwo między tradycyjnymi szkołami filozofii matematyki jest współzawodnictwem pomiędzy dotyczącymi matematyków teoriami pojedynczego podmiotu poznania. W dalszej części artykułu próbowałem przedstawić teorie zbiorowego podmiotu jako alternatywną propozycję dla poważnej filozofii matematyki. Rozpatrywaliśmy kwestię nauczania matematyki i dowodziliśmy, że jest ono ważną składową praktyki matematycznej, ściśle związaną z innymi aspektami matematyki oraz że kształcenie można wyjaśnić tylko w modelach uwzględniających podmiot zbiorowy. Nauczanie nie jest tradycyjnie uznawane za jedno z głównych zagadnień filozofii matematyki, w przeciwieństwie do dowodu matematycznego. Dlatego zajęliśmy się pojęciem dowodu i próbowaliśmy pokazać, jak to pojęcie przedstawia się w perspektywie epistemologii podmiotu grupowego. Doszliśmy do wniosku, że dowody od strony ich powstawania w społeczności matematycznej prezentują się zupełnie odmiennie niż jako formalne dowody przeprowadzone przez pojedynczych, izolowanych matematyków.

Argumenty te są bardzo płodne. Wnoszą one do filozofii matematyki pewne zagadnienia, które są zasadnicze dla współczesnej epistemologii i filozofii nauki. Co więcej, dają one filozofii bliższy praktyce, nowy sposób ujmowania i charakteryzowania matematyki. Robiąc miejsce dla pojęcia matematyka być może robimy również miejsce dla samych matematyków.

Przełożyła Anna Kanik.

PRZYPISY

[1] Co ciekawe, platoński ideał może okazać się niemożliwy, gdy potraktujemy sformalizowaną wersję zdania: „Nikt nie zna tego zdania" jako wyrażenie matematyczne. Czy idealny matematyk je zna, czy nie? Szersze omówienie tego zagadnienia zob. w moim „An Unsolved Puzzle About Knowledge", *The Philosophical Quarterly*, October 1984.

[2] Tę krytykę przekonująco przedstawia Willard Quine w „Truth by Convention", w książce pod red. O.H. Lee, *Philosophical Essays for A.N. Whitehead*, New York: Longmans 1936.

[3] Myśl, że rola społeczności w matematyce musi być wzięta pod uwagę przez filozofię matematyki była ostatnio przedstawiona przez Philip Kitcher w *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford Uniwersity Press 1983. Jest ona również wyraźnie zaprezentowana w: Philip Davis i Reuben Hersh, *The mathematical Experiece*, Boston: Birkhauser 1982, i oczywiście przez Raymond Wilder. Jedno z najwcześniejszych sformułowań tej tezy pojawia się u L. White'a, „The Locus of Mathematical Reality: An Anthropological Footnote", *Philosophy of Science*, 17 (1947), ss. 189-203.

[4] W tym artykule tłumaczy się „private theory" jako „teoria pojedynczego podmiotu poznania", choć jeszcze bardziej precyzyjnie byłoby tłumaczyć „teoria, która zakłada pojedynczy podmiot poznania" oraz „public theory" jako „teoria zbiorowego (czasami grupowego) podmiotu poznania", co dokładniej powinno brzmieć „teoria, która zakłada zbiorowy (czy grupowy) podmiot poznania". W tekście zwroty te występują bardzo często, zatem dla czytelności i zrozumiałości treści podjęłam takie właśnie decyzje. Analogicznie, „private epistemology" tłumaczy się jako „epistemologia pojedynczego podmiotu poznania" oraz „public epistemology" jako „epistemologia zbiorowego (czasami grupowego) podmiotu poznania". (*Przyp. tłum.*)

[5] Por. Judith Grabiner, „Is Mathematical Truth Time-Dependent?", *American Mathematical Monthly*, Vol. 81, N. 4, (1974) ss. 354-365, przedrukowane w mojej antologii *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, która ma wkrótce ukazać się w Bostonie (Birkhauser). Grabiner twierdzi, że nie zawsze tak było. Dawniej matematycy byli niezależni finansowo lub, podobnie jak artyści, mieli mecenasów.

[6] Reuben Hersh i Rene Thom są dwoma matematykami, którzy kładą nacisk na ważność praktyk nauczania dla filozofii. Por. ich artykuły: „Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics", *Advances in Mathematics* 31 (1979), ss. 31-50; i „Modern Mathematics: An Educational and Philosophic Error?", *American Scientist*, Vol. LIX, N. 6 (1971), oba przedrukowane w: Tymoczko, *New Directions*...

[7] Szerszą dyskusję tego tematu zob. w: Anthony Ralston, „Computer Science, Mathematics and the Undergraduate Curricula in Both", *American Mathematical Monthly*, Vol. 88, N. 7 (1981), ss. 472-485.

[8] Zob. Gottlob Frege, *The Foundations of Arithmetic*, Oxford: Basil Blackwell 1968, przedmowa.

[9] Por. Jacque Hadamard, *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, New York: Dover 1954, s. 13.

[10] Graficzne przedstawienie tego wzrostu podaje Davis i Hersh, *op. cit.*, szczególnie s. 29 n.

[11] Willard Quine, *Word and Object,* Cambridge: MIT Press 1960, przedmowa; Wittgenstein, *Dociekania filozoficzne*, przeł. B. Wolniewicz, Warszawa 1970; Saul Kripke, *Wittgenstein on Rules and Private Language*, Cambridge: Harvard 1982.

[12] W swoim artykule „Gödel, Wittgenstein and the Nature of Mathematical Knowledge", w: P. Asquith (ed.), *PSA 1984*, w przygotowaniu.

[13] Imre Lakatos, *Proof and Refutations*, Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

[14] Praca Gödla podaje jeden z powodów odrzucenia filozofii podstaw matematyki, ale te filozofie można krytykować z wielu stanowisk. Program podstaw krytykowali Lakatos i Putnam – wśród filozofów, a wśród matematyków Davis, Hersh i Wilder, uzyskując podobne wnioski. Zestawienie niektórych, bardziej ostrych krytyk zob. w: Tymoczko, *New Directions...*

[15] Hilary Putnam, „Mathematics Without Foundations", przedrukowane w jego *Mathematics, Matter and Method*, Cambridge: Cambridge University Press, 1975, s. 45.

[16] Richard De Millo, Richard Lipton i Alan Perlis, „Social Processes and Proofs of Theorems and Programs", *Communications of the ACM*, Vol. 22, N. 5 (1979), ss. 271-280, przedrukowane w Tymoczko, *New Directions...*

[17] Jest to powtórzenie uwagi Lesbesgue'a, że „w badaniu podstaw i metod matematyki musi znaleźć się dużo miejsca dla psychologii, a nawet dla estetyki" z jego „Les controverses sur la théorie des ensembles et la quéstion des fondements", w: F. Gonseth (red.) *Les entretiens de Zurich*, Zurich: Leeman 1941.