

HALINA EGNER\*, MACIEJ RYŚ\*\*

MODELOWANIE SPRĘŻENIA POMIĘDZY ROZWOJEM  
USZKODZEŃ I PRZEMIANĄ FAZOWĄ W STALI  
AUSTENITYCZNEJ W WARUNKACH TEMPERATUR  
KRIOGENICZNYCHMODELING OF COUPLING BETWEEN DAMAGE  
AND PHASE TRANSFORMATION IN AUSTENITIC  
STAINLESS STEEL AT CRYOGENIC TEMPERATURES

## Streszczenie

Stale austenityczne w ekstremalnie niskich temperaturach podlegają trzem zjawiskom dysypatywnym: plastycznemu płynięciu, przemianie fazowej  $\gamma \rightarrow \alpha'$  oraz rozwojowi uszkodzeń. Przeprowadzone eksperymenty dowodzą, że pojawiające się inkluzje martenzytu powodują spowolnienie rozwoju uszkodzeń plastycznych w matrycy austenitycznej. W pracy przedstawiony został opis konstytutywny zachowania się stali austenitycznej, poddanej obciążeniu w temperaturze bliskiej zeru absolutnemu z uwzględnieniem sprzężenia pomiędzy zjawiskami dysypatywnymi. Został także przedstawiony algorytm numeryczny, opracowany w celu wykonania symulacji jednoosiowego rozciągania.

*Słowa kluczowe: przemiana fazowa, opis konstytutywny, temperatury kriogeniczne*

## Abstract

FCC metals and alloys undergo at low temperatures three distinct phenomena: dynamic strain ageing, plastic strain induced transformation from the parent phase ( $\gamma$ ) to the secondary phase ( $\alpha'$ ) and evolution of micro-damage. Experimental results indicate the correlation between decreasing damage rate and increasing martensite content. In the present paper the constitutive model of the behaviour of stainless steel applied at cryogenic temperature was described, where the three dissipative phenomena coexist. Also the numerical algorithm was worked out, and numerical simulation of uniaxial tension was performed.

*Keywords: constitutive modeling, ductile damage, phase transformation, cryogenic temperature*

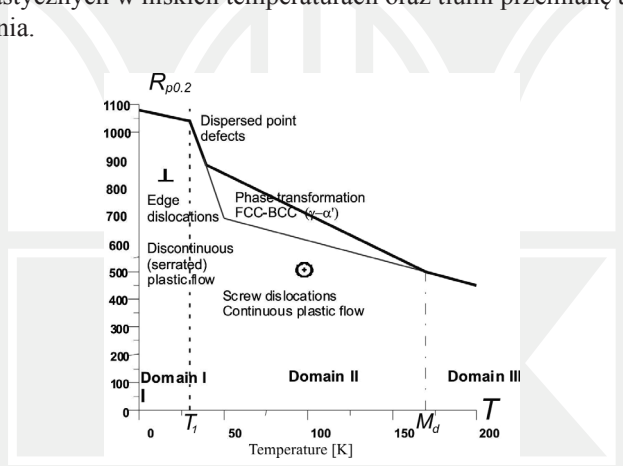
\* Dr inż. Halina Egner, Instytut Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

\*\* Mgr inż. Maciej Ryś, studia doktoranckie, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

## 1. Wstęp

Kriogenika jest dziedziną fizyki i techniki zajmującą się badaniem i wykorzystaniem właściwości ciał w niskich temperaturach, w których gazy takie jak hel czy azot występują w stanie ciekłym. Najbardziej perspektywiczną dziedziną wykorzystania materiałów w temperaturach kriogenicznych wydaje się być przemysł energetyczny i elektroniczny. Przede wszystkim chodzi tu o możliwość stosowania elementów nadprzewodnikowych w urządzeniach energetycznych.

Tylko materiały, które pozostają ciągliwe po wprowadzeniu w środowisko temperatur kriogenicznych, mogą zostać wykorzystane do przenoszenia obciążeń. Cechą charakterystyczną materiałów metalicznych spełniających ten warunek jest regularna, ściennie centrowana struktura krystalograficzna (*face-centred-cubic*, *fcc*) oraz niska energia błędu ułożenia (*low-fault energy*). Stale tego typu zostały przydzielone do grupy stali AISI 300, do której należą także stale nierdzewne, takie jak 304L czy 316L, które są obecnie powszechnie używane w środowiskach kriogenicznych. W porównaniu z typowymi stalami węglowymi materiały te charakteryzuje niska granica plastyczności, duża ciągliwość oraz wysoka granica wytrzymałości na rozciąganie. Wysoka zawartość składników stopowych zapewnia poprawę własności plastycznych w niskich temperaturach oraz tłumi przemianę austenitu w perlit podczas chłodzenia.



Rys. 1. Granica plastyczności ( $R_{p0.2}$ ) w funkcji temperatury ( $T$ ) dla materiałów o niskiej energii błędu ułożenia odkształczanych w niskich temperaturach [2]

Fig. 1. Yield point ( $R_{p0.2}$ ) against temperature ( $T$ ) for LSF materials deformed at low temperature [2]

Rozwój techniki rodzi potrzebę projektowania nowych materiałów, które można wykorzystywać do budowy nowych konstrukcji poddawanych złożonym obciążeniom zarówno mechanicznym, jak i termicznym. Istnieje zatem potrzeba udoskonalania opisów konstytutywnych dla potrzeb innowacyjnych materiałów w celu prawidłowego określenia ich zachowania pod wpływem przyłożonych obciążeń oraz przewidywania pewnych stanów krytycznych.

Stale austenityczne w warunkach temperatur kriogenicznych podlegają trzem podstawowym zjawiskom: nieciągłemu płynięciu plastycznemu [1], przemianie fazowej austenitu ( $\gamma$ ) w martenzyt ( $\alpha'$ ) wywołanej odkształceniami plastycznymi [2, 3], oraz ewolucji mikrouszkodzeń [4].

Stale te wykazują niestateczność zarówno przy plastycznym płynięciu, jak i przy przemianie fazowej  $\gamma \rightarrow \alpha'$ . Dla najczęściej stosowanej stali nierdzewnej 316LN można wyróżnić trzy obszary odpowiedzi (rys. 1) (por. [5]). Obszar I odpowiada zakresowi temperatury poniżej  $T_1$ , w którym obserwuje się niestateczność plastycznego płynięcia, zwaną nieciągłym płynięciem plastycznym (*serrated yielding*). Obszar II rozciąga się pomiędzy temperaturą  $T_1$  a  $M_d$ , czyli temperaturą powyżej której nie zachodzi już przemiana fazowa typu  $\gamma \rightarrow \alpha'$ . Wewnątrz tego obszaru plastyczne płynięcie jest ciągłe i towarzyszy mu przemiana pierwotnej fazy austenitycznej  $\gamma$  we wtórną fazę martenzytyczną  $\alpha'$ . Przemiana ta skutkuje wyraźnym podniesieniem granicy plastyczności. Wreszcie obszar III, powyżej temperatury  $M_d$ , charakteryzuje się ciągłym płynięciem plastycznym i stabilnym zachowaniem jeśli chodzi o przemianę fazową. We wszystkich trzech obszarach dochodzi do rozwoju uszkodzeń ciągłych, sterowanych (ciągłym bądź nie) płynięciem plastycznym. Wszystkie trzy zjawiska: plastyczne płynięcie, przemiana fazowa i rozwój uszkodzeń wywołują nieodwracalną zmianę struktury sieci krystalicznej i mogą przyspieszać proces zniszczenia elementu konstrukcyjnego, zatem w celu przewidywania stanów krytycznych konieczne jest zbudowanie modelu konstytutywnego ujmującego wszystkie te, sprzężone ze sobą, zjawiska nieodwracalne.

## 2. Opis konstytutywny materiału sprężysto-plastycznego z uszkodzeniami oraz przemianą fazową

Przedstawiony poniżej opis konstytutywny stali austenitycznej jest opisem wieloskalowym. Z jednej strony zawiera on elementy opisu zjawisk na poziomie mikrostruktury, takich jak ruch dyslokacji oraz interakcje dyslokacji z inkluzjami martenzytu. Z drugiej strony model jest zdefiniowany na poziomie mezoskopowym przy użyciu koncepcji reprezentatywnego elementu objętościowego (RVE), w którym niejednorodności mikrostruktury ulegają rozmyciu, a ich wzajemne interakcje są pomijane.

Model został zbudowany na podstawie następujących założeń [4]:

- materiał dwufazowy składa się z matrycy austenitycznej oraz losowo rozmieszczonych wtrąceń martenzytu o kształcie elipsoidalnych cząstek Eshelby'ego,
- matryca austenityczna podlega odkształceniom sprężysto-plastycznym oraz rozwojowi uszkodzeń, podczas gdy inkluzje martenzytu zachowują się w sposób kruchy,
- bieżący stan uszkodzenia zarówno w austenicie, jak i w martenzycie opisany jest tensorem drugiego rzędu,
- do oszacowania średniego stanu uszkodzenia w RVE przyjęto liniową regułę mieszania,
- założono, że wpływ prędkości uszkodzenia  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  może być pomijalny w zakresie temperatur 2–77 K,
- założono małe odkształcenia: kumulowane odkształcenie plastyczne nie przekracza 0,2,
- przyjęto wzmocnienie mieszane z uwzględnieniem wpływu inkluzji martenzytycznych,
- materiał dwufazowy podlega stowarzyszonemu prawu płynięcia.

Opierając się na teorii małych odkształceń, możemy dokonać dekompozycji odkształcenia całkowitego  $\epsilon_{ij}$  na część sprężystą  $\mu_{ij}^e$ , plastyczną  $\mu_{ij}^p$  i część odkształcenia spowodowaną przemianą fazową ( $\xi$  oznacza ilość martenzytu,  $\epsilon^{bs} = \frac{1}{3} \Delta v \mathbf{I}$  oznacza deformację zwaną *bain strain*, wyrażoną przez zmianę objętości  $\Delta v$ ):

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \xi \varepsilon_{ij}^{bs} \quad (1)$$

Odształcenia sprężyste są odkształceniami odwracalnymi, zanikającymi przy odciążeniu, natomiast zarówno odkształcenia plastyczne, jak i *bain strain* są odkształceniami trwałymi.

Proces rozwoju uszkodzeń dotyczy wszystkich materiałów. Wiąże się on z występowaniem i rozprzestrzenianiem się defektów w materiale. Zgodnie z drugą zasadą termodynamiki rozwój uszkodzeń prowadzi do wzrostu nieuporządkowania w strukturze materiału, czyli wzrostu entropii. Proces ten jest procesem nieuniknionym i nieodwracalnym (towarzyszy mu dyssypacja energii), a jego zewnętrznym objawem jest degradacja własności mechanicznych materiału (wytrzymałości i sztywności), własności termicznych (współczynnika rozszerzalności termicznej, współczynnika przewodnictwa) i innych własności fizycznych.

Sposób opisu rozwoju uszkodzeń zależy od skali analizy. Zwykle operuje się pojęciami skali atomowej (dynamika molekularna), skali mikro (mikromechanika) lub skali makro (mechanika kontynualna). W skali atomowej struktura materiału jest nieciągła, a stan uszkodzenia jest zdefiniowany przez aktualną konfigurację więzi atomowych, natomiast zrywanie więzi i tworzenie się nowych reprezentuje ewolucję uszkodzeń. W skali mikro lub nano struktura materiału jest odcinkowo ciągła i niejednorodna, a uszkodzenia reprezentowane są przez liczbę, wielkość i konfigurację dyslokacji, mikropustek i mikroszczelin. Są to defekty sieci krystalicznej występujące na granicach lub wewnątrz ziaren i podlegające ciągłej ewolucji. Natomiast jeśli chodzi o skalę makro, wprowadza się pojęcie ośrodka „pseudo-nieuszkodzonego” („pseudo-ciągłego”), stanowiącego aproksymację rzeczywistego, nieciągłego materiału, w którym istnieje pewien stan uszkodzenia. Do prawidłowego przeniesienia własności materiału rzeczywistego na ośrodek „pseudo-ciągły” konieczne jest istnienie takiego elementu objętości materiału rzeczywistego, który może być odwzorowany w punkt materialny „pseudo-kontinuum”. Wymiar takiego elementu, zwanego reprezentatywnym elementem objętościowym (ang. *representative volume element, RVE*), musi być dostatecznie duży, aby liczba zawartych w nim mikrodefektów pozwalała na ich homogenizację. Z drugiej strony element musi być dostatecznie mały, aby stan naprężenia i odkształcenia mógł być w nim uznany za jednorodny. Istnienie takiego elementu jest warunkiem koniecznym do podejścia lokalnego, w którym zakłada się brak wpływu przestrzennej konfiguracji i wzajemnego oddziaływania mikrodefektów na efektywne własności ośrodka „pseudo-ciągłego”.

Rozpatrywanie materiału „pseudo-nieuszkodzonego” wymaga wprowadzenia pojęcia tzw. zmiennych efektywnych zależnych od stanu uszkodzenia, opisywanego pewną miarą uszkodzeń  $D$ , na przykład naprężenia efektywnego  $\tilde{\sigma}_{ij}(D)$  czy odkształcenia efektywnego  $\tilde{\varepsilon}_{ij}(D)$ . Definicja zmiennych efektywnych może wynikać z przyjęcia jednej z zasad równoważności, wśród których najbardziej znane są: zasada równoważności odkształceń [6], zasada równoważności naprężeń [7], zasada równoważności energii komplementarnej [8, 9] i zasada równoważności energii całkowitej [10]. W myśl tych zasad efektywne zmienne stanu są tak zdefiniowane, że odkształcenia, naprężenia, energia komplementarna lub energia całkowita dla obu ośrodków rzeczywistego i „pseudo-nieuszkodzonego” – są takie same.

Uszkodzenia w skali mikro i nano są zjawiskiem dyskretnym, obserwowalnym na poziomie mikrostruktury. Wyróżnia się dwa podstawowe mechanizmy rozwoju uszkodzeń w polikryształach w złożonych warunkach odkształceń sprężysto-lepko-plastycznych: uszkodzenia kruche oraz uszkodzenia ciągliwe. Uszkodzenia ciągliwe są to uszkodzenia obserwowane

wewnątrz ziaren, wzdłuż płaszczyzn poślizgów plastycznych. Ten typ uszkodzeń występuje w temperaturach, w których materiały wykazują cechy plastyczne. Należy tu nadmienić, że proces rozwoju uszkodzeń plastycznych jest ściśle związany (sprzężony) z mechanizmem plastycznego płynięcia. Uszkodzenie plastyczne sprzężone z plastycznym płynięciem jest zdominowane przez orientację pasm, a nie przez kierunek naprężeń głównych, dlatego uszkodzenie to można traktować jako izotropowe i do jego opisu może być wystarczające użycie zmiennej uszkodzenia typu skalarnego  $D$ . Uszkodzenia kruche natomiast definiowane są jako mikropustki występujące wzdłuż granic ziarna. Rozwój tych uszkodzeń jest silnie zależny od kierunku maksymalnego naprężenia głównego. Zależność od kierunku naprężenia głównego powoduje, że uszkodzenia kruche wykazują kierunkowość, nie są zatem uszkodzeniami izotropowymi, lecz anizotropowymi, co wymaga stosowania do ich opisu tensora uszkodzeń drugiego lub wyższego rzędu. Uszkodzenia te nie są związane z plastycznym płynięciem i mogą występować już w zakresie sprężystym.

Stosując geometryczną miarę uszkodzeń, do trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyzn 1, 2, 3, których kierunki normalne pokrywają się z kierunkami naprężeń głównych, stan uszkodzenia opisują trzy wielkości  $D_1, D_2, D_3$ , określające redukcję nośnych powierzchni w tych płaszczyznach. Przedstawiając wielkości te jako główne składowe tensora, dochodzimy do definicji [11] tensora uszkodzeń drugiego rzędu.

$$\mathbf{D} = \sum_{k=1}^3 D_k \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k = D_1 \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + D_2 \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 + D_3 \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3 \quad (2)$$

Wykorzystując tak zdefiniowany tensor uszkodzeń, można uogólnić definicję naprężenia efektywnego wykorzystywaną do tej pory,  $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / (1 - D)$ , na postać anizotropową:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M} : \boldsymbol{\sigma} \quad (3)$$

Definicja tensora wpływu uszkodzenia  $\mathbf{M}$  nie jest jednoznaczna (por. [12]).

Ogólne prawo konstytutywne dla materiału z przemianą fazową i rozwojem uszkodzeń możemy zapisać w postaci (por. wzór (1)):

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}(\mathbf{D})(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p - \xi \varepsilon_{kl}^{bs}) \quad (4)$$

Do wyprowadzenia równań konstytutywnych pseudo-nieuszkodzonego kontinuum zastosowano zasadę równoważności odkształceń w postaci:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{0}) = \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) \quad (5)$$

Aktualny tensor sprężystości zależny od stanu uszkodzenia,  $E_{ijkl}(\mathbf{D})$  może zostać przedstawiony za pomocą tensora sprężystości materiału nieuszkodzonego  $\mathbf{E}^0$  oraz tensora wpływu uszkodzenia  $\mathbf{M}(\mathbf{D})$ :

$$E_{ijkl} = M_{minj}^{-1} E_{mnkl}^0 \quad (6)$$

Tensor wpływu uszkodzenia jest tensorem symetrycznym, zależnym od aktualnego stanu uszkodzenia w materiale:

$$M_{ijkl} = M_{jikl} = M_{klij} \quad (7)$$

W niniejszej pracy został wykorzystany tensor wpływu uszkodzenia zaproponowany przez Cordebois i Sidoroff [8]:

$$M_{ijkl}(\mathbf{D}) = 2 \left[ (\delta_{ik} - D_{ik}) \delta_{jl} + \delta_{ik} (\delta_{jl} - D_{jl}) \right]^{-1} \quad (8)$$

Przedstawiony model materiału sprężysto-plastycznego z uszkodzeniami i przemianą fazową jest oparty na podstawach termodynamiki procesów nieodwracalnych z wewnętrznymi zmiennymi stanu, gdzie zakłada się istnienie potencjału stanu  $\Psi$ , którym zazwyczaj jest swobodna energia Helmholtza. Dla materiału niesprężystego potencjał stanu zależy od sprężystej części odkształcenia oraz zmiennych stanu  $N_k (k = 1, 2, \dots)$ , określających aktualny stan powierzchni dyssypacji (np. rozmiar powierzchni, przesunięcie jej środka):

$$\Psi = \Psi(\epsilon_{ij}^e, N_k) \quad (9)$$

W celu zbudowania modelu matematycznego, opisującego zachowanie materiału sprężysto-plastycznego z ewolucją uszkodzeń oraz przemianą fazową, założono następujący zbiór wewnętrznych zmiennych stanu:

$$N_k = N_k(\epsilon_{ij}^p, p, D_{ij}, \xi) \quad (10)$$

gdzie odkształcenie plastyczne  $\epsilon_{ij}^p$  jest zmienną związaną z kinematycznym wzmocnieniem (ruchem powierzchni plastyczności), akumulowane odkształcenie plastyczne  $p$  jest zmienną związaną z izotropowym wzmocnieniem (rozmiarem powierzchni plastyczności),  $D_{ij}$  jest zmienną określającą anizotropowy stan uszkodzenia w materiale oraz  $\xi$  określa aktualny stan przemiany fazowej.

Akumulowane odkształcenie plastyczne wyrażone jest następująco:

$$p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} d\epsilon_{ij}^p dt \quad (11)$$

Stosując nierówność Clausiusa-Duhema dla warunków izotermicznych, otrzymujemy:

$$\Phi = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \rho \dot{\Psi} \geq 0 \quad (12)$$

gdzie  $\rho$  oznacza gęstość, a  $\Phi$  jest dyssypacją mechaniczną.

Różniczkując po czasie równanie (9), otrzymujemy:

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}^e} \dot{\epsilon}_{ij}^e + \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}^p} \dot{\epsilon}_{ij}^p + \frac{\partial \Psi}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \Psi}{\partial D_{ij}} \dot{D}_{ij} + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \dot{\xi} \quad (13)$$

Następnie podstawiamy powyższe równanie do nierówności Clausiusa–Duhema:

$$\left( \sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}^e} \right) \dot{\epsilon}_{ij}^e + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{bs} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mu_{ij}^p} \dot{\epsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial p} \dot{p} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial D_{ij}} \dot{D}_{ij} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \dot{\xi} \geq 0 \quad (14)$$

Z równania (14) wynikają wzory na siły termodynamiczne sprzężone z odpowiednimi zmiennymi stanu:

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \quad (15)$$

$$X_{ij} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \quad (16)$$

$$R = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial p} \quad (17)$$

$$-Y_{ij} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial D_{ij}} \quad (18)$$

$$Z = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \quad (19)$$

gdzie  $X_{ij}$ ,  $R$ ,  $-Y_{ij}$  i  $Z$  są siłami termodynamicznymi sprzężonymi z wewnętrznymi zmiennymi stanu, odpowiednio  $\varepsilon_{ij}^p$ ,  $p$ ,  $D_{ij}$  oraz  $\xi$ .

Ostateczna postać równań sił termodynamicznych zależy od przyjętej formy potencjału stanu. W tym przypadku potencjał stanu jest wyrażony przez energię swobodną Helmholtza w postaci [4]:

$$\Psi = \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{2} \varepsilon^e : \mathbf{M} : \varepsilon^e \right) + \Psi_p \quad (20)$$

gdzie  $\Psi_p$  jest plastyczną częścią potencjału stanu, która nie zależy od tensora uszkodzeń  $D_{ij}$ . Równania ewolucji odkształceń plastycznych oraz uszkodzeń wyprowadzono w oparciu o zasadę maksimum dyssypacji (aktualny stan sił termodynamicznych jest to ten, który maksymalizuje funkcję dyssypacji). Równania te wynikają z rozwiązania zagadnienia Lagrange'a minimalizacji funkcjonału:

$$\Omega = -\Phi + \lambda f^p \quad (21)$$

gdzie funkcja płynięcia  $f^p(\sigma, D)$  jest założona jako wypukła funkcja w przestrzeni swoich argumentów. W przypadku przyjęcia modelu, który nie zależy od prędkości odkształcenia (*rate-independent*), powierzchnia plastyczności typu Hubera–Misesa przybiera następującą formę:

$$f^p(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\mathbf{X}}, \tilde{R}) = J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\mathbf{X}}) - \sigma_y - \tilde{R} = 0 \quad (22)$$

gdzie

$$\tilde{X}_{ij} = M_{ijkl} X_{kl}; \quad \tilde{R} = R / (1 - D_{eq}); \quad D_{eq} = \sqrt{D_{ij} D_{ij}} \quad (23)$$

są wartościami efektywnymi sił termodynamicznych związanych odpowiednio ze wzmocnieniem kinematycznym i izotropowym (por. [13]).

Warunki konieczne ekstremum przyjmują postać:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial Y_{ij}} = 0 \quad (24)$$

Z powyższych równań otrzymujemy:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f^p}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \dot{D}_{ij} = \lambda \frac{\partial f^p}{\partial Y_{ij}} \quad (25)$$

Parametr  $\lambda \geq 0$  wynika z warunku zgodności (*consistency condition*):

$$df^p = \frac{\partial f^p}{\partial \sigma_{ij}} (d\sigma_{ij} - dX_{ij}) + \frac{\partial f^p}{\partial R} dR + \frac{\partial f^p}{\partial D_{ij}} dD_{ij} + \frac{\partial f^p}{\partial \xi} d\xi = 0 \quad (26)$$

Warunki obciążania/odciążania (warunki Kuhn-Tuckera) przyjmują postać:

$$f^p \leq 0 \quad i \quad \dot{f}^p \begin{cases} < 0 \wedge \dot{\lambda} = 0 & \text{proces plastycznie bierny} \\ = 0 \wedge \dot{\lambda} = 0 & \text{proces plastycznie neutralny} \\ = 0 \wedge \dot{\lambda} > 0 & \text{proces plastycznie czynny} \end{cases} \quad (27)$$

Ostatecznie dla matrycy austenitycznej podlegającej rozwojowi uszkodzeń ciągłych otrzymano uogólnione prawo ewolucji uszkodzeń anizotropowych (na skutek istnienia tekstury) [4]:

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{C}^T \dot{p}H(p - p_D) \quad (28)$$

oraz w notacji wskaźnikowej

$$\dot{D}_{ij} = C_{ik} Y_{kl} C_{lj} \dot{p}H(p - p_D) \quad (29)$$

Należy tu zaznaczyć, iż przedstawiony opis ewolucji uszkodzeń plastycznych dla materiałów charakteryzujących się teksturą został wyprowadzony na bazie klasycznego modelu Lemaitre'a [14] i Chaboche'a [15]. Siłą napędową rozwoju uszkodzeń jest kumulowane odkształcenie plastyczne. Tensor  $\mathbf{C}$  definiuje właściwości materiału w kierunkach głównych ortotropii wywołanej teksturą. Ponadto przyjęto progową wartość odkształcenia kumulowanego  $p_D$  jako granicę, po przekroczeniu której nastąpi rozwój uszkodzeń.

Wtrącenia martenzytyczne podlegają rozwojowi uszkodzeń kruchych. Zgodnie z publikacją Litewki i Dębińskiego [16] osłabienie struktury materiału kruchego przez przyłożone obciążenie może być opisane tensorową funkcją w postaci:

$$\mathbf{D}_{(\alpha)ij} = f_1 \delta_{ij} + f_2 \sigma_{ij} \quad (30)$$



Eksperymenty przeprowadzone przez Bogucką i innych [17] pokazują, że proces rozwoju uszkodzeń rozpoczyna się od momentu przyłożenia obciążenia, zatem można przyjąć, że tensor uszkodzeń zależy bezpośrednio od przyłożonego naprężenia. Równanie (30) zawiera dwa mnożniki,  $f_1$  i  $f_2$ , które są funkcjami skalarnymi stanu naprężenia. Do sformułowania ostatecznych postaci funkcji  $f_1$  i  $f_2$  wykonano wiele testów jedno- i dwuosiowego ściskania kilku rodzajów betonu. Ostatecznie skalarnie funkcje występujące w równaniu (30) przedstawiono w postaci:

$$f_1 = B_1 s_{kl} s_{kl} (1 + P \det \sigma_{ij})^F \quad (31)$$

$$f_2 = B_2 \sqrt{\sigma_{kl} \sigma_{kl}} (1 + P \det \sigma_{ij})^F \quad (32)$$

gdzie  $s_{kl}$  jest dewiatorem naprężenia oraz  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $P$  i  $F$  są stałymi materiałowymi, które należy zidentyfikować eksperymentalnie. Podstawiając do wzoru (30) wyrażenia (31) i (32), otrzymujemy zależność opisującą rozwój uszkodzeń kruchych w formie:

$$D_{(\alpha)ij} = B_1 s_{kl} s_{kl} (1 + P \det \sigma_{ij})^F \delta_{ij} + B_2 \sqrt{\sigma_{kl} \sigma_{kl}} (1 + P \det \sigma_{ij})^F \sigma_{ij} \quad (33)$$

Pierwsza część równania (33) przedstawia rozwój uszkodzenia izotropowego, natomiast druga określa rozwój uszkodzeń kierunkowych związanych z tensorem naprężeń.

Średnia miara stanu uszkodzenia w materiale została wyrażona przez liniową regułę mieszania:

$$D_{ij} = (1 - \xi) D_{(\gamma)ij} + \xi D_{(\alpha)ij} \quad (34)$$

Dwufazowe kontinuum podlega stowarzyszonemu prawu płynięcia:

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{\partial f^p(\tilde{\sigma}, \tilde{X}, \tilde{R})}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad (35)$$

Łącząc wzór (35) ze wzorami (22) i (23), otrzymano poniższą relację:

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{\partial f^p(\tilde{\sigma}, \tilde{X}, \tilde{R})}{\partial \tilde{\sigma}_{kl}} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda = d\lambda \frac{\frac{3}{2}(\tilde{s}_{kl} - \tilde{X}'_{kl})}{\sqrt{\frac{3}{2}(\tilde{s}_{pq} - \tilde{X}'_{pq})(\tilde{s}_{pq} - \tilde{X}'_{pq})}} M_{klij} \quad (36)$$

Jeśli kierunki główne naprężenia, odkształcenia oraz uszkodzenia pokrywają się, otrzymujemy następującą relację w postaci macierzowej:

$$[d\epsilon_{ij}^p] = \frac{\tilde{\sigma} \tilde{X} \frac{3}{2} d\lambda}{\sqrt{\frac{3}{2}(\tilde{s}_{pq} - \tilde{X}'_{pq})(\tilde{s}_{pq} - \tilde{X}'_{pq})}} \begin{bmatrix} \frac{\tilde{s}_{11} - \tilde{X}'_{11}}{1 - D_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{s}_{22} - \tilde{X}'_{22}}{1 - D_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tilde{s}_{33} - \tilde{X}'_{33}}{1 - D_{33}} \end{bmatrix} \quad (37)$$

tak więc stan odkształcenia plastycznego w obecności uszkodzeń traci nieściślność. Prędkość kumulowanego odkształcenia plastycznego przybiera następującą postać:

$$dp = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} = d\lambda \sqrt{\frac{2}{3} \left( \frac{\partial f_p}{\partial \tilde{\sigma}_{kl}} M_{klij} \right) \left( \frac{\partial f_p}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}} M_{piqj} \right)} = d\lambda \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial f_p}{\partial \tilde{\sigma}_{kl}} \frac{\partial f_p}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}} M_{klij} M_{piqj}} \quad (38)$$

Ewolucję sił termodynamicznych wzmocnienia reprezentują równania:

$$dX_{ij} = \frac{2}{3} g(\xi) d\varepsilon_{ij}^p \quad (39)$$

gdzie funkcje  $g(\xi)$  oraz  $f(\xi)$  zostały wyprowadzone w pracy Sitko i Skoczenia [3] w następującej formie:

$$g(\xi) = 2\beta(\mu_{MT} - \mu_{ta}) \quad (41)$$

$$f(\xi) = 2(1-\beta)(\mu_{MT} - \mu_{ta}) \quad (42)$$

oraz

$$\mu_{ta} = \frac{E_t}{2(1+\nu)}; \quad E_t = \frac{EC}{E+C}; \quad C = C_0(h\xi + 1) \quad (43)$$

$$\mu^* = \frac{\mu_{ta}(9k_{ta} + 8\mu_{ta})}{6(k_{ta} + 2\mu_{ta})}, \quad k_{ta} = \frac{E_t}{3(1-2\nu)}, \quad \mu_m = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (44)$$

$$2\mu_{MT} + 2\mu^* = \left[ \frac{1-\xi}{2(\mu_{ta} + \mu^*)} + \frac{\xi}{2(\mu_m + \mu^*)} \right]^{-1} \quad (45)$$

Klasyczny model przemiany fazowej  $\gamma \rightarrow \alpha'$  wywołanej odkształceniem plastycznym (obszar II, rys. 1) w temperaturach kriogenicznych, został zaproponowany przez Olsons i Cohena [18]. Autorzy zaproponowali trójparametrowy model, opisujący sigmoidalną krzywą doświadczalną, reprezentującą zależność udziału objętościowego martenzytu w funkcji odkształcenia plastycznego:

$$\xi_{\alpha'} = 1 - \exp\{-\beta[1 - \exp(-\alpha\varepsilon^p)]^n\} \quad (46)$$

Krzywa sigmoidalna ma zastosowanie w szerokim zakresie temperatur, w tym w temperaturze pokojowej. W niskich temperaturach prędkość przemiany fazowej przestaje być zależna od temperatury i może być przybliżona modelem liniowym, zaproponowanym przez Gariona i Skoczenia [2]:

$$\dot{\xi} = A(T, \sigma, \dot{\varepsilon}^p) \dot{p}H((p - p_\xi)(\xi_L - \xi)) \quad (47)$$

gdzie  $A(\dots)$  jest funkcją temperatury, stanu naprężenia oraz prędkości odkształceń,  $p_\xi$  oznacza progową wartość kumulowanego odkształcenia plastycznego, natomiast  $\xi_L$  oznacza graniczną wartość wysycenia martenzytem, wreszcie  $H$  jest funkcją Heaviside'a. Siłą nośną przebu-

dowy struktury z komórki (*fcc*) na (*bcc*) jest kumulowane odkształcenie plastyczne wywołane monotonicznym lub cyklicznym obciążeniem w niskich temperaturach. Dla procesów izotermicznych oraz małych zmian naprężeń otrzymano proste prawo ewolucji w formie:

$$d\xi = Adp, \quad p \geq p_\xi, \quad \xi \leq \xi_L \quad (48)$$

### 3. Implementacja numeryczna

Opisany w pracy model konstytutywny został zaimplementowany numerycznie przy użyciu metody Newtona–Raphsona oraz schematu całkowania nie wprost (*Euler backward*). Algorytm numeryczny składa się z trzech kroków: sprężystego predyktora, korektora plastyczno-fazowego oraz uaktualnienia stanu uszkodzenia.

#### Krok 1. Sprężysty predyktor

Algorytm startuje od przyrostu  $n$ , w którym wszystkie zmienne stanu są znane. Zakłada się, że zmiana odkształcenia w następnym przyroście,  $n + 1$ , jest w całości sprężysta, otrzymując w ten sposób naprężenie próbne (*trial stress*):

$$\sigma_{ij}^{\text{trial}} = \sigma_{ij}^{\text{old}} + E_{ijkl}^{\text{old}} \Delta \varepsilon_{kl} = \sigma_{ij}^{\text{old}} + E_{ijkl}^{\text{old}} (\varepsilon_{kl}^{\text{new}} - \varepsilon_{kl}^{\text{old}}) \quad (49)$$

gdzie  $\Delta \varepsilon_{kl}$  jest całkowitym, znanym przyrostem odkształcenia w danym inkreencie. Następnie sprawdzane jest kryterium plastyczności, równanie (22). Jeśli  $f^{p,\text{trial}}(\sigma^{\text{trial}}, \mathbf{X}^{\text{old}}, R^{\text{old}}, \mathbf{D}^{\text{old}}, \xi^{\text{old}}) \leq 0$ , to założenie sprężystego przyrostu jest spełnione, a naprężenie próbne jest naprężeniem na końcu kroku  $n + 1$ ,  $\sigma_{ij}^{\text{new}} = \sigma_{ij}^{\text{trial}}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{p,\text{new}} = \varepsilon_{ij}^{p,\text{old}}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{bs,\text{new}} = \varepsilon_{ij}^{bs,\text{old}}$ ,  $D_{(\gamma)ij}^{\text{new}} = D_{(\gamma)ij}^{\text{old}}$ . Obliczany jest przyrost uszkodzeń kruchych z równania  $D_{(\alpha)ij}^{\text{new}} = f_1 \delta_{ij} + f_2 \sigma_{ij}^{\text{trial}}$ , a na końcu zostaje uaktualniony tensor efektu uszkodzeń oraz tensor sztywności sprężystej. Jeśli natomiast  $f^{p,\text{trial}}(\sigma^{\text{trial}}, \mathbf{X}^{\text{old}}, R^{\text{old}}, \mathbf{D}^{\text{old}}, \xi^{\text{old}}) > 0$ , to następuje plastyczno-fazowy korektor.

#### Krok 2. Plastyczno-fazowy korektor

Procedura korektora przeprowadzana jest przy założeniu, że stan uszkodzenia jest zamrożony.

Spełnienie nierówności:  $f^{p,\text{trial}}(\sigma^{\text{trial}}, \mathbf{X}^{\text{old}}, R^{\text{old}}, \mathbf{D}^{\text{old}}, \xi^{\text{old}}) > 0$  oznacza, że *trial stress* leży poza powierzchnią plastyczności. Zatem przyłożone odkształcenie  $\Delta \varepsilon_{kl}$  przynajmniej w części jest plastyczne. Naprężenie powrotu  $\sigma^r$  (*return stress*) sprowadza stan naprężenia na bieżącą powierzchnię plastyczności:

$$\sigma_{ij}^r = E_{ijkl}^{\text{old}} \Delta \varepsilon_{kl}^I = E_{ijkl}^{\text{old}} (\Delta \varepsilon_{kl}^p + \Delta \varepsilon_{kl}^{bs}) \quad (50)$$

W celu określenia naprężenia powrotu całkowane jest prawo płynięcia plastycznego (35):

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \int_{\lambda^{(1)}}^{\lambda^{(2)}} \frac{\partial f^p}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad (51)$$

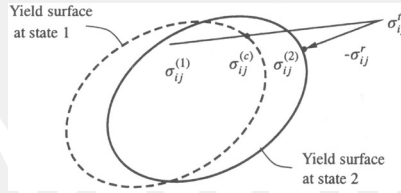
gdzie  $\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)} + \Delta\lambda$  i  $\lambda^{(1)} = \lambda^{(c)}$ , a  $c$  oznacza punkt kontaktu („przebiecia” powierzchni plastyczności przez wektor naprężenia próbne, patrz rys. 2). Wartość  $\partial f^{p,n} / \partial \sigma_{ij}$  znana jest tylko w punkcie kontaktu ze „starą” powierzchnią plastyczności, więc problem rozwiązywany jest w przybliżeniu:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \int_{\lambda^c}^{\lambda^{(2)}} \frac{\partial f^p}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \approx \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{(2)} \Delta \lambda \quad (52)$$

oraz

$$\Delta \xi = A \Delta p H(p^{\text{new}} - p_\xi)(\xi_L - \xi^{\text{new}}) = A \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \varepsilon_{ij}^p \Delta \varepsilon_{ij}^p H(p^{\text{new}} - p_\xi)(\xi_L - \xi^{\text{new}}) \quad (53)$$

Korzystamy więc ze schematu nie wprost *fully implicit* (*backward Euler*), który jest zawsze stabilny i nie zależy od punktu kontaktu, nie musimy zatem wiedzieć, jaka część odkształcenia jest sprężysta, a jaka plastyczna.



Rys. 2. Ilustracja metody return

Fig. 2. The sketch of return method

Wartości sił termodynamicznych na końcu kroku określone są następująco:

$$\sigma_{ij}^{\text{new}} = \sigma_{ij}^{\text{trial}} - E_{ijkl}^{\text{old}} \left[ \left( \frac{\partial f^p}{\partial \sigma_{kl}} \right)^{\text{new}} (\Delta \lambda + \Delta \xi \varepsilon_{kl}^{bs}) \right] \quad (54)$$

$$X_{ij}^{\text{new}} = X_{ij}^{\text{old}} + \frac{2}{3} g(\xi^{\text{new}}) \left( \frac{\partial f^p}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{\text{new}} \Delta \lambda \quad (55)$$

$$R^{\text{new}} = R^{\text{old}} + f(\xi^{\text{new}}) \Delta p \quad (56)$$

Nowy stan w przyroście  $n + 1$  musi spełnić warunki:

$$f^p(\sigma^{\text{new}}, \mathbf{X}^{\text{new}}, R^{\text{new}}, \mathbf{D}^{\text{old}}, \xi^{\text{new}}) = 0 \quad (57)$$

Następnie definiujemy wektor residuów  $\mathbf{R} = [R_\sigma, R_X, R_R, R_f]$  z następującymi składowymi:

$$R_{(\sigma)ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\text{trial}} + E_{ijkl}^{\text{old}} \left[ \left( \frac{\partial f^p}{\partial \sigma_{kl}} \right)^{\text{new}} \Delta \lambda + \Delta \xi \varepsilon_{kl}^{bs} \right] \quad (58)$$

$$R_{(X)ij} = X_{ij} - X_{ij}^{\text{old}} - \frac{2}{3} g(\xi^{\text{new}}) \left( \frac{\partial f^p}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{\text{new}} \Delta \lambda \quad (59)$$

$$R_{(R)} = R - R^{\text{old}} - f(\xi^{\text{new}}) \Delta p \quad (60)$$

$$R_f = f^p \quad (61)$$

oraz wektor niewiadomych,  $\mathbf{U} = [\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R, \Delta \lambda]^T$ . Spełnienie warunku  $\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$  określa rozwiązanie. Jeśli rozwinieśmy ten warunek w szereg Taylora, otrzymamy następujące rozwiązanie dla wektora  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n - \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right)^n \right]^{-1} \mathbf{R}^n \quad (62)$$

Procedura kolejnych przybliżeń rozwiązania jest zatrzymana w momencie osiągnięcia dokładności określonej przez użytkownika.

Po każdej iteracji wszystkie zmienne stanu oraz siły termodynamiczne są uaktualniane zgodnie z algorytmem przedstawionym w tabeli 1.

Macierz Jacobianu przyjmuje postać:

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_\sigma}{\partial \tilde{\mathbf{A}}} & \frac{\partial \mathbf{R}_\sigma}{\partial \mathbf{X}} & \frac{\partial \mathbf{R}_\sigma}{\partial R} & \frac{\partial \mathbf{R}_\sigma}{\partial \Delta \lambda} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial \tilde{\mathbf{A}}} & \frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial \mathbf{X}} & \frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial R} & \frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial \Delta \lambda} \\ \frac{\partial R_R}{\partial \tilde{\mathbf{A}}} & \frac{\partial R_R}{\partial \mathbf{X}} & \frac{\partial R_R}{\partial R} & \frac{\partial R_R}{\partial \Delta \lambda} \\ \frac{\partial R_f}{\partial \tilde{\mathbf{A}}} & \frac{\partial R_f}{\partial \mathbf{X}} & \frac{\partial R_f}{\partial R} & \frac{\partial R_f}{\partial \Delta \lambda} \end{bmatrix} \quad (63)$$

a składowe wektora niewiadomych na końcu kroku liczone są następująco:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial f^p(\boldsymbol{\sigma}^{\text{new}}, \mathbf{X}^{\text{new}}, R^{\text{new}}, \mathbf{D}^{\text{old}}, \xi^{\text{new}})}{\partial \sigma_{ij}} \Delta \lambda^{\text{new}} \quad (64)$$

$$\varepsilon_{ij}^{p,\text{new}} = \varepsilon_{ij}^{p,\text{old}} + \Delta \varepsilon_{ij}^p \quad (65)$$

$$\Delta p = \sqrt{\frac{2}{3} \Delta \varepsilon_{ij}^p \Delta \varepsilon_{ij}^p} \quad (66)$$

$$p^{\text{new}} = p^{\text{old}} + \Delta p \quad (67)$$

$$\Delta \xi = A \Delta p H(p^{\text{new}} - p_\xi)(\xi_L - \xi^{\text{new}}) = A \sqrt{\frac{2}{3} \Delta \varepsilon_{ij}^p \Delta \varepsilon_{ij}^p} H(p^{\text{new}} - p_\xi)(\xi_L - \xi^{\text{new}}) \quad (68)$$

$$\xi^{\text{new}} = \xi^{\text{old}} + \Delta\xi \quad (69)$$

Tabela 1

### Algorytm korektora

<p>1. Inicjowanie zmiennych</p> $\mathbf{U}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{U}_n$ $\mathbf{U}^{\text{new}(0)} = \mathbf{U}^{\text{old}}$ <p>2. Iteracje</p> <p>DO UNTIL <math>\ \mathbf{R}(\mathbf{U}^{(k)})\  &lt; \text{TOI}</math></p> $k \leftarrow k + 1$ <p>2.1. Iterowanie <math>\mathbf{U}^{(k+1)}</math></p> $\mathbf{U}^{(k+1)} = \mathbf{U}^{(k)} - \left[ \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{U}^{(k)})}{\partial \mathbf{U}} \right]^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{U}^{(k)})$ <p>2.2. Uaktualnienie wektora zmiennych <math>\mathbf{U}</math></p> $\mathbf{U}_{n+1}^{\text{new}} = \mathbf{U}^{(k+1)}$
---

### Krok 3. Uaktualnienie stanu uszkodzenia

Uaktualnienie stanu uszkodzenia odbywa się zgodnie z przedstawioną poniżej procedurą:

$$\Delta D_{(\gamma)ij} = C_{ik} (\epsilon^{p,\text{new}})^{Y_{kl}^{\text{old}}} C_{ij} (\epsilon^{p,\text{new}}) \Delta p H(p^{\text{new}} - p_D) \quad (70)$$

$$D_{(\gamma)ij}^{\text{new}} = D_{(\gamma)ij}^{\text{old}} + \Delta D_{(\gamma)ij} \quad (71)$$

$$D_{(\alpha')ij}^{\text{new}} = B_1 s_{kl}^{\text{new}} s_{kl}^{\text{new}} (1 + P \det \sigma_{ij}^{\text{new}})^F \delta_{ij} + B_2 \sqrt{\sigma_{kl}^{\text{new}} \sigma_{kl}^{\text{new}}} (1 + P \det \sigma_{ij}^{\text{new}})^F \sigma_{ij}^{\text{new}} \quad (72)$$

$$D_{ij}^{\text{new}} = (1 - \xi^{\text{new}}) D_{(\gamma)ij}^{\text{new}} + \xi^{\text{new}} D_{(\alpha')ij}^{\text{new}} \quad (73)$$

### 4. Wyniki numeryczne

Dane materiałowe potrzebne do rozwiązania problemu oraz krzywa  $\sigma - \epsilon$  zostały zaczerpnięte z dostępnych prac: Egner i Skoczeń [4] oraz Sitko [19]. Szczegółowy opis sposobu identyfikacji parametrów modelu został zawarty w pracy Egner i Skoczeń [4]. Z powodu braku danych koniecznych do wyliczenia mnożników  $f_1$  oraz  $f_2$  (patrz wzory 31 i 32) stałe  $B_1$  oraz  $B_2$  zostały dobrane tak, aby symulacja numeryczna jak najlepiej odzwierciedlała wyniki badań eksperymentalnych. Wszystkie dane zostały przedstawione w tabeli 2.

Tabela 2

## Dane materiałowe dla stali 316L w temperaturze 4,2 K

Początkowy moduł Younga [GPa]	247,266
Współczynnik Poissona	0,3
Granica plastyczności [MPa]	808
$\beta$	0,9
$h$	100
$\Delta V$	0,05
$p_d$	0,056
$p_\xi$	0,0886
$\xi_L$	0,9
$A$	5,2872
$B_1$ [Pa]	$1,0e^{-20}$
$B_2$ [Pa]	$1,0e^{-20}$
$C^0$ [Pa]	$1,2452e^{-3}$
$C^1$ [Pa]	0,013658
Moduł plastyczny [GPa]	1,2

Opierając się na dostępnym opisie konstytutywnym oraz przyjętych danych materiałowych, otrzymano satysfakcjonujące wyniki w formie wykresu naprężenie-odkształcenie (rys. 3).

Z wykresów widać, że model zawiera sprzężenie między trzema zjawiskami dyssypatywnymi: plastycznym płynięciem, przemianą fazową oraz ewolucją uszkodzeń. Do momentu osiągnięcia progowej wartości kumulowanego odkształcenia  $p_d$  obserwujemy materiał sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem liniowym. Następnie pojawiają się uszkodzenia ciągłe austenitu osłabiają materiał. Zamodelowana interakcja pomiędzy rozwojem uszkodzeń ciągłych a przemianą fazową powoduje, że w momencie pojawienia się inkluzji martenzytu (przekroczenia progowej wartości kumulowanego odkształcenia  $p_\xi$ ) następuje osłabienie prędkości rozwoju uszkodzeń oraz nieliniowe wzmocnienie materiału. Oddziaływanie między uszkodzeniami a zawartością fazy martenzytycznej możemy dokładnie zaobserwować na rys. 4. Bieżący stan uszkodzenia obliczany jest z relacji  $D = 1 - E/E_0$ , gdzie  $E$  jest aktualnym modułem odciążania, zmierzonym eksperymentalnie, natomiast  $E_0$  jest modułem początkowym (por. Egner i Skoczeń [4]).

Należy zaznaczyć, że efekt spowolnienia rozwoju uszkodzeń w materiale spowodowany jest głównie tym, że w modelu założono, że pojawiająca się krucha faza martenzytu nie „dziedziczy” uszkodzeń ciągłych z pierwotnej fazy austenitycznej, a stan uszkodzenia w fazie kruchej zależy tylko od bieżącego stanu naprężenia. Takie podejście nie jest wystarczające do dokładnego opisu rozwoju uszkodzeń w materiale, stąd istnieje rozbieżność między wykresem eksperymentalnym rozwoju uszkodzeń a otrzymanym z obliczeń numerycznych (rys. 4).





Mierzalną miarą mięknięcia materiału jest spadek modułu Younga. Z uwagi na uproszczony model uszkodzeń w materiale otrzymany z numerycznej symulacji wykres spadku modułu Younga także nieco odbiega od wyników doświadczalnych (rys. 5).

Rozbieżności pomiędzy wynikami numerycznymi i doświadczalnymi mogą zostać zlikwidowane przez wzbogacenie opisu rozwoju uszkodzeń. Jednak bardziej złożony model wymaga dodatkowych parametrów, których identyfikacja doświadczalna na obecnym etapie rozwoju technik eksperymentalnych jest bardzo trudna i kosztowna.

## 5. Uwagi końcowe

Zaprezentowany opis konstytutywny dotyczy materiału podlegającego trzem zjawiskom dyssypatywnym: plastycznemu płynięciu, przemianie fazowej austenitu w martenzyt, której siłą napędową jest odkształcenie plastyczne, oraz ewolucji uszkodzeń, czego wynikiem jest spadek modułu Younga.

Taki model materiału jest właściwy w przypadku stali austenitycznych pracujących pod obciążeniem w temperaturach kriogenicznych. Klasyczny izotropowy model rozwoju uszkodzeń ciągłych (model Chaboche–Lemaitre) został uogólniony do postaci anizotropowej, wynikającej z istnienia tekstury w materiale, następnie rozbudowany o model ewolucji uszkodzeń kruchych w martenzycie i sprzężenie rozwoju uszkodzeń z przemianą fazową, a w końcu zaprogramowany numerycznie i wykorzystany do symulacji próby jednoosiowego rozciągania. Otrzymane wyniki numeryczne są zgodne z wynikami prób eksperymentalnych. Pełna weryfikacja poprawności modelu wymaga przeprowadzenia testów eksperymentalnych stali poddanej obciążeniom złożonym w temperaturze kriogenicznej. W chwili obecnej wyniki takich testów nie zostały opublikowane.

W pracy zamodelowano spadek prędkości uszkodzeń z powodu pojawiającego się martenzytu. Na obecnym etapie brak jest mechanizmów wzmocnienia powierzchni uszkodzeń. Jednak z drugiej strony, przyjęty opis jest wygodny z uwagi na małą liczbę i łatwość identyfikacji stałych materiałowych potrzebnych do obliczeń modelu.

Otrzymane wyniki obliczeń numerycznych są zadowalające, a zbudowany algorytm w łatwy sposób może zostać zaimplementowany w dowolnym programie MES.

*Praca została wykonana w ramach grantu PB N N501 228440 finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.*

## Literatura

- [1] Skoczeń B., Bielski J., Sgobba S., Marcinek D., *Constitutive model of discontinuous plastic flow at cryogenic temperatures*, International Journal of Plasticity, 26, 2010, 1659-1679.
- [2] Garion C., Skoczeń B., *Modeling of plastic strain induced martensitic transformation for cryogenic applications*, Journ. of Applied Mechanics 69, 6, 2002, 755-762.

- [3] Sitko M., Skoczeń B., *Effect of  $\gamma \rightarrow \alpha'$  phase transformation on plastic adaptation to cyclic loads at cryogenic temperatures*, International Journal of Solids and Structures, 49, 2012, 613-634.
- [4] Egner H., Skoczeń B., *Ductile damage development in two-phase metallic materials applied at cryogenic temperatures*, International Journal of Plasticity, 26, 4, 2010, 488-506.
- [5] Obst, B., Nyilas, A., *Experimental evidence on the dislocation mechanism of serrated yielding in f.c.c. metals and alloys at low temperatures*, Materials Science and Engineering, A137, 1991, 141-150.
- [6] Lemaître J., *Evaluation of dissipation and damage in metals*, Proc. I.C.M. Kyoto, Vol. 1, 1971.
- [7] Simo J.C., Ju J.W., *Strain- and stress-based continuum damage models; I-Formulation, II-Computational aspects*, International Journal of Solids and Structures, 23, 1987, 821-869.
- [8] Cordebois J.P., Sidoroff F., *Damage induced elastic anisotropy*, Coll. Euromech 115, Villard de Lans także w: Mechanical Behavior of Anisotropic Solids, ed. Boehler J.P., Martinus Nijhoff, Boston, 1983, 1979, 761-774.
- [9] Sidoroff F. *Description of anisotropic damage application to elasticity*, [w:] IUTAM Coll. on Physical Nonlinearities in Structural Analysis, Springer, Berlin 1981, 237-244.
- [10] Chow CL., Lu T.J., *An analytical and experimental study of mixed-mode ductile fracture under nonproportional loading*, Int. J. Damage Mech., 1, 1992, 191-236.
- [11] Murakami S., Ohno N., *A continuum theory of creep and creep damage*, in: Ponter, A.R.S., Hayhurst D.R. (Eds), Creep in Structures, 3<sup>rd</sup> IUTAM Symposium on Creep in Structures, Springer, Berlin 1980, 422-444.
- [12] Skrzypek J., *Podstawy Mechaniki Uszkodzeń*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2006.
- [13] Abu Al-Rub R.K., Voyiadjis G.Z., *On the coupling of anisotropic damage and plasticity models for ductile materials*, International Journal of Solids and Structures, 40, 2003, 2611-2643.
- [14] Lemaître J., *A Course on Damage Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin 1992.
- [15] Chaboche J.L., *Continuum Damage Mechanics: Part II – Damage Growth, Crack Initiation and Crack Growth*, Jour. Applied Mechanics, 55, 1988, 64-72.
- [16] Litewka A., Dębiński J., *Load-induced oriented damage and anisotropy of rock-like materials*, International Journal of Plasticity 19, 2003, 2171-2191.
- [17] Bogucka J., Dębiński J., Litewka A., Mesquita A.B., *Experimental verification of mathematical model for oriented damage of concrete*, Mechanica Experimental, 3, 1998, 11-18.
- [18] Olson G.B., Cohen M., *Kinetics of strain-induced martensitic nucleation*, Metallurgical Transactions, 6A, 1975, 791-795.
- [19] Sitko M., *Constitutive Modelling of Functionally Graded Materials for Low Temperature Structural Applications*, praca doktorska, 2011.