PRINCIPIA LXVII (2020): 119–131 PL
ISSN 0867 5392
DOI 10.4467/20843887PI.20.005.13835

Anna Bożena Pietryga

Relacja rotalna i obszar pusty jako narzędzie rozstrzygania o ważności trybów tradycyjnego sylogizmu na przykładzie wybranych trybów figury trzeciej

Rotal relation and an empty region as a tool for deciding the validity of traditional sylogism moods as exemplified by selected third figure ones

Streszczenie

Tradycyjna sylogistyka proponuje wysnuwanie wniosku o relacji między dwoma zbiorami z dwóch przesłanek kategorycznych, z których każda stwierdza coś o relacji łączącej jeden z tych zbiorów z trzecim (którego nazwa stanowi tzw. termin średni).
Od średniowiecza znana jest metoda sprawdzania poprawności formalnej sylogizmu na podstawie wnikliwej oceny jego składni, a od XIX wieku również metoda graficznego przedstawiania przesłanek na diagramie Venna dla trzech zbiorów, których wzajemne relacje stanowią temat sylogizmu. W diagramie tym pewną trudność stanowi pojawiająca się w wielu przypadkach niepusta suma obszarów. W przedstawianym artykule proponuje się nową metodę przedstawienia przesłanek sylogizmu, polegającą na prezentacji obszarów, w których mogą lub muszą według przesłanek znajdować się elementy zbiorów, i tych obszarów, które z pewnością są puste. W szczególności dla niepustej sumy obszarów proponuje się wykorzystanie relacji rotalnej między dwoma obszarami tworzącymi niepustą sumę i możliwe ujednoznacznienie tej relacji przez wskazany w przesłance pusty obszar diagramu.

Słowa kluczowe: sylogistyka, relacje binarne między zbiorami, obszary puste, diagram Venna dla trzech zbiorów, teoria ralacji, niepusta suma obszarów

Summary

Traditional syllogistics sugests inferring a result about the binary relation between sets from the two categorical premisses each of which state something about a relation between one of them to a third set (whose name is called the middle term).
Since the Middle Ages it is known how to check the formal correctness of a syllogism by the detailed analysis of its syntax, and since the 19th century also how to present the premisses graphically on the Venn diagram for three sets, whose mutual binary relations consttute the subject of syllogistics. The non-empty sum of subregions is sometimes not very comfortable to deal with.
In the paper a new method is described for presenting syllogisms premisses, which consists in indicating the subregions, in which the premisses say some elements may or have to be located and those subregions which are announced empty. In particular, for the non-empty sum of two regions the rhotal relation is suggested together with the the possible corresponding empty region, had it been suitably indicated by one ot he premisses.

Keywords: traditional syllogistics, binary relations between sets, empty regions, Venn diagram for three sets, relation theory, non-empty sum of regions

1.1 Co to jest tradycyjny sylogizm?

Tradycyjnym sylogizmem nazywamy zazwyczaj rozumowanie złożone z trzech zdań[1], z których dwa pierwsze nazywamy przesłankami, a ostatnie – wnioskiem, przy czym wszystkie trzy wymienione zdania są zdaniami orzekającymi, w których występują orzeczenia imienne. W roli podmiotów i orzeczni-

[1] Nietrafność tego sformułowania przekonująco rzedstawił wszakże dwa lata temu znawca języków starożytnych i znawca sylogistyki, prof. Marian Wesoły we wstępie do swojego tłumaczenia Analityk Arystotelesa. Zob. Wesoły, Marian, (2020), "Wstęp", [w:] Arystoteles, *Analityki pierwsze/Analityki wtóre. Teksty, przekłady, komentarze*. (tłum. i red.) Wesoły M. (2020), ss.19-59, s.29.

ków w tych zdaniach występują w sumie trzy nazwy, zapisywane zazwyczaj wielkimi literami S, P, M, czyli tzw. terminy (odpowiednio: mniejszy, większy i średni), a w roli łączników, które będą tu nazywane spójkami logicznymi – cztery spójki międzynazwowe zdaniotwórcze zapisywane małymi literami a, e, i oraz o. Spójki zdań ogólnych to a oraz e, zdań szczegółowych – i oraz o. Zdania twierdzące zawierają spójki pochodzące od znaków odpowiadających dwóm pierwszym samogłoskom łacińskiego czasownika affirmo (stwierdzam), zdania przeczące zawierają spójki pochodzące od łacińskiego nego (zaprzeczam).

Tradycyjnie S oznacza podmiot wniosku, a P jego predykat. Ponadto P występuje jeszcze raz w pierwszej przesłance jako podmiot lub predykat, natomiast S w jednej z tych ról występuje w przesłance drugiej. Obydwie przesłanki w pozycjach podmiotu i orzecznika uzupełnia termin średni, zapełniając nieobsadzone pozycje składniowe w przesłankach.

Możliwe ustawienia terminów są podstawą uporządkowania sylogizmów w cztery tzw. figury sylogizmu wg następującego schematu:

I. MP, SM/ SP
II. PM, SM/ SP
III. MP, MS/ SP
IV. PM, MS/ SP.

Ponieważ uporządkowane w opisany powyżej sposób terminy wymagają uzupełnienia każdego z wymienionych wierszy przez jedną z czterech zdaniotwórczych spójek międzynazwowych, nietrudno policzyć, że możliwych sylogizmów jest w każdej figurze 4x4x4=64, czyli wszystkich sylogizmów tradycyjnych jest 256.

1.2. Tryby ważne

Trybem ważnym nazywamy taki tryb, w którym wniosek wynika z przesłanek. Tybów ważnych jest w sylogistice tradycyjnej zaledwie dwadzieścia cztery (po sześć dla każdej z figur). Mają one własne nazwy, nadane im w średniowieczu. Każda z nazw zawiera trzy litery odpowiadające spójkom wykorzystanym w danym trybie. Poniżej podaję nazwy wszystkich trybów ważnych, umieszczając w nawiasach nazwy trybów podporządkowanych (są to tzw. modi subalterni – wniosek jest w nich szczegółowy, choć z danych przesłanek wywnioskować można również odpowiadające mu zdanie ogólne, co zachodzi np. w trybie Barbari – w odróżnieniu od trybu Barbara.)

Dla figury I: Barbara, Celarent, Darii, Ferio, (Barbari, Celaront)

Dla figury II: Cesare, Camestres, Festino, Baroco, (Cesaro, Camestros)

Dla figury III: Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison, Darapti, Felapton

Dla figury IV: Camenes, Dimatis, Fresison, (Camenos), Fesapo, Bamalip[2].

1.3. Metody stwierdzania ważności danego trybu sylogizmu tradycyjnego

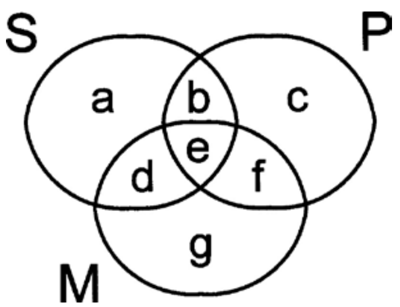
Już w średniowieczu utworzono kilka reguł dla sylogistyki Arystotelesa, które w niezawodny sposób pozwalają ocenić ważność danego trybu. Reguły te są następujące: termin średni (czyli termin, który występuje – po jednym razie – w obydwu przesłankach) musi być rozłożony (czyli dana przesłanka ma informować o każdym elemencie jego zakre-

---

[2] Por. E. Żarnecka-Biały, *Mała logika. Podstawy logicznej analizy tekstów, wnioskowania i argumentacji*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2006, s. 75, tamże więcej szczegółów o informacjach technicznych zakodowanych w nazwach poszczególnych trybów.

su) przynajmniej raz (terminami rozłożonymi są podmioty zdań ogólnych i orzeczniki zdań przeczących). Jedna z przesłanek musi być zdaniem twierdzącym. Jeżeli jedna z przesłanek jest zdaniem przeczącym, wniosek też musi być zdaniem przeczącym, a jeśli obydwie przesłanki są zdaniami twierdzącymi, twierdzący musi być i wniosek. Termin rozłożony we wniosku musi wcześniej zostać rozłożony także w którejś przesłance.

W dziewiętnastym wieku angielski matematyk John Venn opracował tzw. diagramy Venna, używane do zobrazowania relacji między zbiorami. Zastosowane do przesłanek sylogizmu diagramy takie pozwalają ocenić jego ewentualną ważność przez zaznaczenie dla danego rozumowania (nie)pustości każdego z siedmiu podobszarów diagramu i porównanie zaznaczenia z wysnuwanym w rozumowaniu wnioskiem, którego nie należy na tym samym diagramie rysować. Poszczególnym obszarom dla sprawności opisu można nadawać nazwy, na przykład w przedstawiony poniżej sposób[3]:



[3] Oznaczenia w diagramie za: W. Suchoń, *Sylogistyki klasyczne. Podręcznik z ćwiczeniami komputerowym*i, Kraków 1999:17. Podobne rozwiązanie przynosi podział diagramu wraz z jego uniwersum na tzw. składowe, zob. W. Guzicki i P. Zakrzewski, *Wykłady ze Wstępu do Matematyki. Wprowadzenie do teorii mnogości*, PWN, Warszawa 2005, s. 21.

W diagramie Venna, jak widać na powyższym rysunku, uwzględnia się wszystkie warianty sumy, różnicy oraz iloczynu między zbiorami S, P i M, można więc zaznaczyć na nim element należący do jednego, dwóch lub trzech wymienionych zbiorów jednocześnie[4].

Występująca w sylogizmach niepusta suma obszarów jest do dziś pewną niedogodnością zarówno dla osob poznających tradycyjne sylogizmy jak i dla ich nauczycieli.

2.1 Definicje nowych relacji oraz ich zastosowanie

Omawiane poniżej relacje zachodzą za każdym razem wewnątrz jednego ze zbiorów S, P i M, będącego tematem sylogizmu. Dotyczą one takich podobszarów diagramu Venna dla trzech zbiorów, które łącznie zawierają co najmniej jeden element, ale jego położenie jest niejasne. Łączna niepustość tych obszarów stanowi podstawowe założenie Arystotelesa o niepustości używanych nazw, przejęte następnie przez twórców tradycyjnej sylogistyki. Podobszary łącznie niepuste będziemy nazywać zamglonymi, aby metaforycznie opisać nieznajomość przynależności elementu do konkretnego obszaru.

2.1.1. Relacją ο(omikron), lub relacją omikronową[5] między nazwami czterech z siedmiu podobszarów w, x, y, z (diagramu Venna dla trzech zbiorów) której zachodzenie zapisujemy symbolicznie jako ο(w,x,y,z), nazywamy relację między czterema podobszarami diagramu, które nie mają nawzajem ze sobą ele-

---

[4] Diagramy dla większej liczby zbiorów zostały opisane np. przez W. Guzickiego w artykule p.t. *Diagramy Venna*, zob. *http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_mnogosci/2011/02/12/Diagramy_Venna/*

[5] Zastosowanie greckich liter są do zapisywania relacji zakresowych (nie tylko w logice tradycyjnej) przedstawia książka Wojciecha Suchonia *Sylogistyka: interpretacja zakresowa*, ss. 15-21. W niniejszym artykule stosuję trzy pierwsze niewykorzystane jeszcze do tego celu litery omikron, pi i ro. Dziękuję Profesorowi Suchoniowi za konsultację w kwestii artykułu, która pozwoliła mi uniknąć licznych błędów, m.in. związanych z doborem litery oznaczającej relację wymienioną w tytule.

mentów wspólnych, a których suma jest niepusta. (Na przykład jeśli zakres nazwy S rozpada się na cztery podzakresy a, b, c, d, to podstawowe założenie Arystotelesa o niepustości używanych nazw daje się opisać jako omikron(a,b,c,d).)

2.1.2. Relacją ϖ(pi) między nazwami trzech z siedmiu podobszarów diagramu Venna dla trzech zbiorów x, y i z , czyli np. ϖ(a,b,c), nazywamy relację ternarną między podobszarami diagramu, które nie mają nawzajem ze sobą elementów wspólnych, a których suma jest niepusta na mocy przynajmniej jednej przesłanki sylogizmu, którego dany diagram dotyczy, a która stwierdza brak jakiegokolwiek elementu w jednym z podobszarów zbioru. Pozostałe trzy podobszary tego zbioru pozostają ze sobą w relacji ϖ.

2.1.3. Relacją ρ(ro) lub relacją rotalną między nazwami dwóch z siedmiu podobszarów diagramu Venna dla trzech zbiorów x i y (czyli np. aρb) nazywamy relację binarną między podobszarami diagramu, które nie mają elementów wspólnych, a których suma jest niepusta na mocy przynajmniej jednej przesłanki tradycyjnego sylogizmu, którego diagram dotyczy.

Podsumowując powyższe definicje możemy stwierdzić, że zdefiniowane relacje wiążą się ze sobą w ten sposób, że gdy a jest różne od 0, to może zachodzić np. relacja omikron(a,x,x,x), pi(x,a,x) oraz – co najistotniejsze – ρ (x,a).

2.2. Zastosowanie wprowadzonych relacji

Interesująca nas niepusta suma podobszarów łączy z reguły podobszary sąsiadujące ze sobą, które stanowią różnicę między dwoma z trzech zbiorów S, P, M albo część wspólną takiej pary zbiorów. Łączną niepustość sumy takich podobszarów za każdym razem gwarantuje, poza ogólnym arystotelesowskim założeniem o niepustości zbiorów S, P i M, co najmniej jedna przesłanka sylogizmu. Niepuste sumy podobszarów mogą krzyżować się ze sobą jako zbiory niezależne, a jeżeli jeden z podobszarów (argumentów) połączonych ze sobą relacją rotalną okazuje się pusty na mocy innej przesłanki, możemy stwierdzić niepustość drugiego z argumentów danej relacji rotalnej. Rozwiązanie takie jest możliwe do uzasadnienia na gruncie logiki klasycznego rachunku zdań jako przykład zastosowania reguły opuszczania alternatywy. Mówi ona, co następuje:

Definicja reguły opuszczania alternatywy

Jeżeli do dowodu należy zarówno alternatywa, jak i negacja jednego z jej członów, to wolno dodać do dowodu drugi człon tej alternatywy.

W naszym przypadku poprawne jest na tej właśnie zasadzie uznanie następujących prawidłowości.

Jeżeli, a=0 i o(a,b,c,d), to pi(b,c,d),

Jeżeli, a=0 i pi(a,b,c), to ro(b,c),

Jeżeli, a=0 i ro(a,b), to b jest różne od 0.

3. Tryby trzeciej figury wykorzystujące przesłanki o spójkach o oraz a

Metoda opisu:

- W przypadku zachodzenia relacji omikronowej, relacji pi lub relacji rotalnej wskazujemy jej argumenty,
- Oznaczamy obszary, które na pewno są puste, jako równe zeru =0, jeżeli natomiast wiemy z przesłanek, że jakiś obszar z pewnością jest niepusty, piszemy o nim, że jest różny od zera ≠0.

Odnotujmy teraz, używając greckich liter, warunki prawdziwości poszczególnych zdań kategorycznych:

SaP : a=d=0 i ρ(b,e)

SeP : b=e=0 i ρ(a,d) i ρ(c,f)

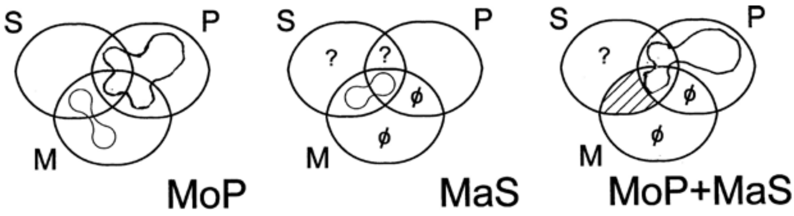
SiP : ρ(b,e)

SoP : ρ(a,d) i ο(b,c,e,f)

3.1. Tryb niezawodny trzeciej figury – spójki oao

Jedynym trybem ważnym trzeciej figury dla przesłanek zawierających kolejno spójki o oraz a jest tryb Bocardo.

$(M\text{-}P \neq 0) \wedge (M\text{-}S=0) \rightarrow (S\text{-}P \neq 0)$



$o(b, c, e, f) \wedge d\rho g \wedge d\rho e \wedge f=g=0$

Zamierzony wynik SoP mówi, że istnieje przynajmniej jeden element zbioru S nie należący do P, powinien on więc znajdować się w podobszarze a lub d. O podobszarze a przesłanki nie mówią nic ważnego, ale informują nas za to o dwóch relacjach rotalnych, w jakie uwikłany jest podobszar d, oraz o pustym podobszarze g, który zawęzi jedną z odpowiadających im mgieł.

$(d\rho e) \wedge (d\rho g) \wedge (g=0)$

W ten sposób, mgła nad dρg zostaje zawężona. Dlatego możemy zaznaczyć niepusty obszar d, pisząc:

$d \neq 0$

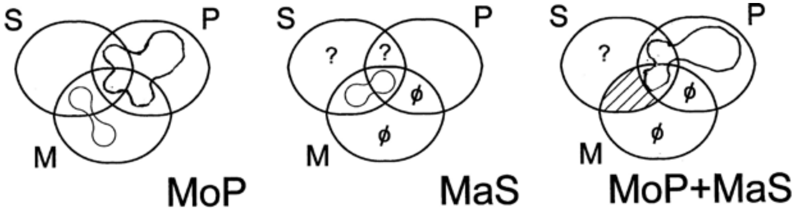
Wniosek SoP wynika z przesłanek. Rozumowanie jest poprawne.

Q.E.D.

3.2. Tryby zawodne trzeciej figury dla spójek o, a w przesłankach

Spójki oaa

(M-P≠0) ∧ (M-S=0) → (S-P=0)



o(b, c, e, f) ∧ dρg ∧ dρe ∧ f=g=0

Wynik SaP informuje, że każdy element S należy też do P (więc podobszary a oraz d są puste). Przesłanki tego nie potwierdzają. Obydwie mówią nam, że d jest argumentem w relacji rotalnej z innym podobszarem (i ostatecznie to właśnie d okazuje sie niepuste, co przeczy wnioskowi), natomiast żadna z przesłanek nie stwierdza, że puste jest a. Jeśli chodzi o podobszary b i e, pierwsza przesłanka stwierdza zachodzenie relacji omikron na obszarze P, nie podaje więc żadnych danych co do ewentualnego położenia elementów S akurat w b czy e (relacja omikron zostaje we wniosku zawężona do relacji pi ze względu na pusty podobszar f).

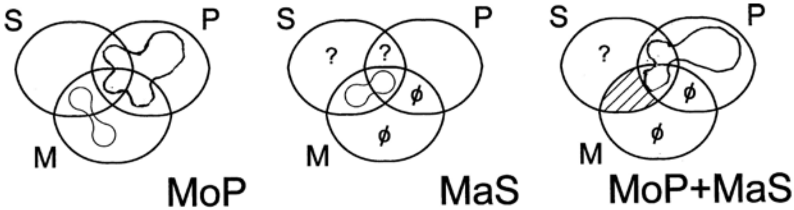
Nie wiemy więc z przesłanek niczego ani o niepustości wspólnych dla S oraz P podobszarów b i e, ani o pustości podobszarów S znajdujących się poza P.

Zatem wniosek SaP nie wynika z przesłanek, a wnioskowanie jest zawodne.

Q.E.D.

Spójki oae

(M-P≠0) ∧ (M-S=0) → (S·P=0)



o(b, c, e, f) ∧ dρg ∧ dρe ∧ f=g=0

Wynik SeP mówi, że nie istnieją elementy wspólne dla zbiorów S oraz P (czyli podobszary b oraz e są puste). Jednak pierwsza przesłanka stwierdza o zbiorze P jedynie to, że panuje w nim relacja omikron (nie możemy więc znać przynależności żadnego z elementów P do konkretnego podobszaru zakresu tego zbioru) i stwierdza, że leżący poza P podobszar d pozostaje w relacji rotalnej z podobszarem g (który jest i poza S i poza P). Druga przesłanka zapewnia, że relacja rotalna zachodzi między d i e (po rozpatrzeniu obu przesłanek okazuje się, że za niepuste można uznać d, gdyż relacja rotalna z pierwszej przesłanki została rozbita przez pustość obszaru g).

dρg ∧ dρe ∧ g=0

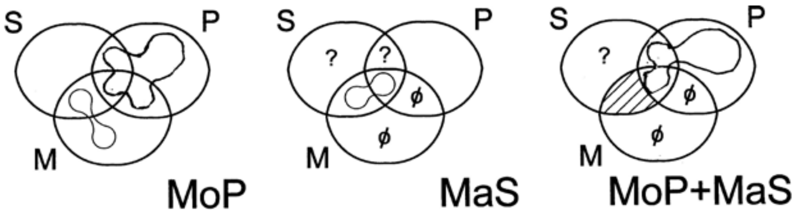
Jak widać, na podstawie przesłanek nie można wykluczyć obecności któregoś z elementów S na którymś obszarze zbioru P (nie można też go stwierdzić).

Zatem wniosek SeP nie wynika z przesłanek, a rozumowanie jest zawodne.

Q.E.D.

Spójki oai

$(M\text{-}P \neq 0) \wedge (M\text{-}S = 0) \rightarrow (S \cdot P \neq 0)$



$o(b, c, e, f) \wedge d\rho g \wedge d\rho e \wedge f=g=0$

Zamierzony wynik SiP mówi, że istnieje element wspólny dla zbiorów S oraz P (musi on więc należeć do sumy podobszarów b i e). Przesłanki nie gwarantują prawdziwości tego stwierdzenia. Pierwsza z nich mówi, że w P zachodzi relacja omikron (więc zarówno b jak i e są na razie nieznane co do ich (nie)pustości), i relacja rotalna pomiędzy obszarami d i g, natomiast przesłanka druga mówi, że d pozostaje w relacji rotalnej z e.

$o(b, c, e, f) \wedge d\rho g \wedge d\rho e \wedge g=0$

Ostatecznie, wskutek interesującej współzależności pomiędzy podobszarami zamglonymi a pustymi, pustość podregionu g przesądza o tym, że za niepusty musimy uznać będący z nim w relacji rotalnej obszar d.

Natomiast obszary b i e są nadal nieznane co do swej (nie) pustości jako argumenty relacji pi, powstałej z zawężonej przez pusty podobszar f (f=0) byłej relacji omikron:

$\varpi(b, c, e)$

Wobec tego wynik SiP nie wynika z przesłanek, a rozumowanie jest zawodne.

Q.E.D.

4. Zakończenie

Przedstawiony tryb ważny pokazuje zasadę działania dwóch uzupełniających się czynników: relacji omikronowej, relacji pi i relacji rotalnej z jednej strony i ujednoznaczniającego tę ostatnią zbioru pustego, co prowadzi do osiągnięcia zamierzonego wyniku. Przedstawione tryby, które nie są ważne, świadczą o tym, że w ich przypadku do podobnego działania nie dochodzi. Czytelnik zechce sam sprawdzić, czy w przypadkach pozostałych trybów zawodnych rzecz przedstawia się tak samo.

BIBLIOGRAFIA

Guzicki, Wojciech i Piotr Zakrzewski, *Wykłady ze Wstępu do Matematyki. Wprowadzenie do teorii mnogości*, PWN, Warszawa 2005.

Suchoń, Wojciech, *Sylogistyka: interpretacja zakresowa,* Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 1996.

Suchoń, Wojciech, *Sylogistyki klasyczne. Podręcznik z ćwiczeniami komputerowym*i, TAiWPN UNIVERSITAS, Kraków 1999.

Wesoły, Marian, (2020), “Wstęp”, [w:] Arystoteles, *Analityki pierwsze/Analityki wtóre. Teksty, przekłady, komentarze*. (tłum. i red.) Wesoły M. (2020), ss.19-59

Żarnecka-Biały, Ewa, *Mała logika. Podstawy logicznej analizy tekstów, wnioskowania i argumentacji*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2006

Dr hab. Anna Bożena Pietryga
Uniwersytet Opolski
apietryga@uni.opole