

Lidia Pawłusińska<sup>1</sup>  <https://orcid.org/0000-0003-0311-9755>

Uniwersytet Szczeciński

## DZIECKO BADACZEM W ŚWIECIE MATEMATYKI

### A Child as a Researcher in the World of Mathematics

**S u m m a r y:** Modern trends mathematical education of the youngest school children emphasise cognitive activity as the necessary condition for proper development of mathematical competences. In this context, learning mathematics should be understood as a formation process of the individual's own mental structures. Teaching through exploration is a practice naturally tied to mathematical education defined in such way.

The article presents the problem of organised mathematical exploration done by students in the early childhood education. It aims at giving arguments supporting the idea that despite their intellectual immaturity, children are still able to perform exploration activities, during which they show behaviours similar to those that are usually associated with professional mathematicians. The paper outlines the origins of the concept of teaching through exploration and touches on ideas of children's mathematical exploration activity, as well as the cognitive processes in motion during learning through exploration.

**K e y w o r d s:** early childhood education, mathematical education, mathematical exploration done by students

---

<sup>1</sup> Dr Lidia Pawłusińska – matematyk, pedagog, adiunkt w Katedrze Wczesnej Edukacji Instytutu Pedagogiki Uniwersytetu Szczecińskiego. Zainteresowania badawcze: rozwój kompetencji matematycznych uczniów na pierwszym etapie edukacyjnym, problemy nauczycieli wczesnej edukacji w zakresie edukacji matematycznej. Adres do korespondencji: Instytut Pedagogiki US, ul. Ogińskiego 16/17, 70-431 Szczecin; e-mail: lidia.pawlusinska@usz.edu.pl.

*Jeśli umiecie diagnozować radość dziecka i jej natężenie, musicie dostrzec, że najważniejszą jest radość pokonanej trudności, osiągniętego celu, odkrytej tajemnicy.*

Janusz Korczak

## Wprowadzenie

Wprowadzając dziecko w świat działalności matematycznej, należy w organizacji zajęć matematycznych uwzględnić wszystkie te formy pracy profesjonalistów, z którymi z powodzeniem poradzą sobie dzieci. Przez takie doświadczenia uczniowie kształtują poczucie, że matematyka to dziedzina wymyślona przez człowieka i dla człowieka. Natomiast to, czy pokochają matematykę i jakie miejsce wyznaczą jej w swoim przyszłym życiu, zależy w dużej mierze od indywidualnych preferencji każdego z nich. Jednak osoby zaangażowane w kształcenie matematyczne kolejnych pokoleń powinny mieć na uwadze, że właściwie zaplanowana edukacja matematyczna nie koncentruje się na wychowaniu przyszłych matematyków. Jej celem jest wspieranie aktywnego i świadomego uczestnictwa człowieka w życiu społecznym i kulturalnym, które przesiąknięte jest wszechobecną matematyką.

Dyskusje prowadzone wokół kształcenia matematycznego wyraźnie zwracają się w kierunku aktywności własnej dziecka, upatrując w niej warunku koniecznego trwałości, użyteczności i funkcjonalności wiedzy. Nie budzi zatem zdumienia fakt, że poszukiwania efektywnych rozwiązań dydaktycznych lokują się w obszarze doświadczenia, eksperymentowania i prowadzenia badań matematycznych już od najmłodszych lat. W tym miejscu pojawia się pytanie, czy dziecko może być badaczem matematyki. Odpowiedź nie jest taka oczywista, zwłaszcza gdy na dwóch biegunach edukacji matematycznej ulokujemy z jednej strony możliwości poznawcze dziecka, a z drugiej – specyficzne cechy matematyki, które wymagają dojrzałości intelektualnej jednostki przejawiającej się m.in. w zdolności do formalnego operowania abstrakcyjnymi obiektami matematycznymi. Artykuł jest poświęcony możliwościom dziecka w zakresie prowadzenia badań w świecie matematyki. Głównym przedmiotem analizy są poglądy polskich dydaktyków i metodyków na kształcenie matematyczne z wykorzystaniem uczenia się przez badanie we wczesnej edukacji.

## Kształcenie przez badanie w edukacji wczesnoszkolnej

Pierwsze wzmianki o potrzebie przeprowadzania przez uczniów badań w trakcie ich edukacji pojawiają się w Polsce bardzo wcześnie. O walorach kształcących zdobywania wiedzy poprzez doświadczenie, eksperymentowanie oraz badanie

dowiadujemy się już z prac Komisji Edukacji Narodowej (1773)<sup>2</sup>. Niestety z powodów geopolitycznych milkną one na pewien czas, by powrócić na przełomie XIX i XX wieku w refleksjach na temat kształcenia, szczególnie w zakresie nauk przyrodniczych<sup>3</sup>. Warto podkreślić, że w okresie międzywojennym po raz kolejny zwrócono uwagę na potrzebę realizacji takiej edukacji, która umożliwi dzieciom i młodzieży uczenie się przez prowadzenie badań<sup>4</sup>. Sergiusz Hessen w tym czasie tak pisał o procesie kształcenia:

Dziecko poznające, czyniąc swe pierwsze spostrzeżenia nad rzeczywistością i wniosując z nich, nieświadomie podlega już tym prawom i regułom, które kierują również pracą uczonego. „Myślenie naukowe”, „wykształcenie naukowe” jest tylko wyższym stopniem tego procesu, którego początkowymi etapami są poprzednie rozważania i wiadomości życiowe dziecka<sup>5</sup>.

Dlatego – jego zdaniem – kształtujące się nowe podejście do nauczania i uczenia się należało wiązać z tzw. wychowaniem naukowym, bo konieczność prowadzenia badań Hessen uznawał za wprowadzenie w świat poznania naukowego. Przekonywał, że umiejętność korzystania z metody poznania naukowego ułatwia rozwiązywanie najróżnorodniejszych zagadnień oraz samodzielne dochodzenie do nowej wiedzy<sup>6</sup>. Był to czas, gdy powstawało wiele szkół i ośrodków kształcenia, które w centrum oddziaływań wspierających uczenie się stawiały wyzwania aktywności poznawczej uczniów wykorzystujące uczenie się przez badanie<sup>7</sup>.

Stanisław Palka uczenie się przez badanie definiuje jako odmianę uczenia się problemowego, gdzie wysoki poziom samodzielności ucznia występuje we wszystkich etapach pracy – począwszy od formułowania czy identyfikowania problemów, poprzez projektowanie i realizację badań, aż do analizy i interpretacji wyników oraz formułowania wniosków<sup>8</sup>. Podkreśla, że podczas rozwiązywania problemów uczenie się przez badanie otwiera perspektywy dla gromadzenia informacji, które powinno odbywać się przy użyciu metod właściwych dla danej dziedziny wiedzy

---

<sup>2</sup> Stanisław Palka cytuje za Henrykiem Rowidem: „Polska myśl pedagogiczna, pozostając w wieku Oświecenia w ścisłej łączności z prądami wychowawczymi Zachodu, coraz silniej podkreślała ważność i znaczenie samodzielnej pracy młodzieży, która wiedzę zdobywać winna nie za pośrednictwem książki jedynie, ale przede wszystkim drogą własnego doświadczenia przez bezpośrednie spostrzeganie różnorodnych objawów życia, różnych zjawisk w przyrodzie. Ustawy KEN podają pod tym względem zasady dydaktyczne oraz wskazania praktyczne owiane duchem nowoczesnej pedagogiki” – Stanisław Palka, „Kształcenie przez badanie w praktyce szkolnej”. *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego. Prace Pedagogiczne* 1 (1984): 11.

<sup>3</sup> Por. Tamże, 11–12.

<sup>4</sup> Por. Tamże, 14–16; Franciszek Bereźnicki, *Dydaktyka kształcenia ogólnego* (Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls”, 2004), 319.

<sup>5</sup> Sergiusz Hessen, *Podstawy pedagogiki* (Warszawa: Nakład Naszej Księgarni Sp. Akc. Związku Nauczycielstwa Polskiego, 1931), 248.

<sup>6</sup> Tamże, 267.

<sup>7</sup> Palka, „Kształcenie przez badanie”, 17.

<sup>8</sup> Tamże, 27.

i w miejscu, które sprzyja realizacji prowadzonych przez uczniów badań<sup>9</sup>. Co więcej, przyjmuje stanowisko Władysława Zaczyńskiego i Wincentego Okonia, podnosząc rangę uczenia się przez badanie do rangi metody nauczania, określając ją mianem metody badawczej<sup>10</sup>. Definiuje metodę badawczą jako pewien sposób pracy nauczyciela i uczniów, w którym rolą nauczyciela jest stwarzanie ram organizacyjnych działalności badawczej uczniów, a rolą uczniów – przeprowadzenie badań z zachowaniem etapowości postępowania właściwej dla nauczania problemowego<sup>11</sup>. Zwraca w taki sposób uwagę, że prowadzenie badań w toku zdobywania wiedzy powinno być identyfikowane z wyzwalaniem aktywności poznawczej, emocjonalnej i praktycznej dziecka.

Oczywiście należy zaznaczyć, że organizowanie pracy i możliwość podejmowania czynności badawczych w toku kształcenia nie jest kierowane tylko do starszych uczniów. Okoń, opierając się na rozpowszechnionej wśród psychologów opinii dotyczącej kształtowania tzw. inteligencji nabytej, przekonuje, że w najwcześniejszym okresie życia człowieka następuje najintensywniejszy jej rozwój, by w późniejszych latach powiększać zasób, bazując na powstałych w pierwszych latach życia strukturach inteligencji<sup>12</sup>.

Zalety uczenia się przez badania dostrzegano na całym świecie. Znamienici naukowcy, jak John Dewey, Jean Piaget, Lew Wygotsky czy Jerome S. Bruner wskazywali na działalność badawczą jako jedną z pożądanych aktywności poznawczych<sup>13</sup>. Szwajcarski psycholog i pedagog Hans Aebli tak opisywał potrzebę prowadzenia badań w trakcie uczenia się:

[...] to właśnie w toku badań (oczywiście różnorodnych, wykonywanych zarówno przez dziecko, jak i przez naukowca) rozwija się myślenie, następuje jego postęp. Można nawet określić badanie jako aktywność umysłową, w czasie której powstają nowe pojęcia i nowe operacje<sup>14</sup>.

Prowadzenie badań w trakcie uczenia się pozostaje kwestią nadal aktualną. Jej obecność w literaturze przedmiotu wskazuje, że w niewystarczającym stopniu wpisała się w praktykę edukacyjną<sup>15</sup> i nadal należy poszukiwać rozwiązań, które przekonają nauczycieli o jej wielkich zaletach. Uczenie się przez badanie nabiera

<sup>9</sup> Tamże.

<sup>10</sup> Tamże, 28.

<sup>11</sup> Tamże.

<sup>12</sup> Wincenty Okoń, „Kształcenie wielostronne”. W: *Encyklopedia pedagogiczna*, red. Wojciech Pomykało (Warszawa: Fundacja Innowacja, 1993), 333.

<sup>13</sup> Por. Jerome S. Bruner, *Poza dostarczone informacje. Studia z psychologii poznawania*, tłum. Barbara Mroziak (Warszawa: PWN, 1978), 676.

<sup>14</sup> Hans Aebli, *Dydaktyka psychologiczna* (Warszawa: PWN, 1982), 111.

<sup>15</sup> Por. Mirosław Dąbrowski, *Pozwólmy dzieciom myśleć* (Warszawa: CKE, 2008); *Badanie umiejętności podstawowych uczniów klas trzecich. Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*. Red. Mirosław Dąbrowski. Warszawa: CKE, 2009, s. 132; Alina Kalinowska, *Pozwólmy dzieciom działać. Mity i fakty o rozwijaniu myślenia matematycznego* (Warszawa: CKE, 2010), 11; Marcin Karpiński, Małgorzata Zambrowska, *Nauczanie matematyki w szkole podstawowej. Raport z badania* (Warszawa: IBE, 2015).

szczególnego znaczenia w nabywaniu kompetencji matematycznych. Na tę kwestię zwraca uwagę Edyta Gruszczyk-Kolczyńska, negując zjawisko papierowej edukacji matematycznej i podkreślając znaczenie wczesnych doświadczeń matematycznych dziecka. Jej zdaniem to one umożliwiają dzieciom wstępną matematyzację<sup>16</sup>, która według Zofii Krygowskiej jest ważnym etapem kształtowania myślenia matematycznego<sup>17</sup>. Alina Klinowska podkreśla, że edukacji matematycznej nie możemy postrzegać jednostronnie jako edukacji opartej na wprowadzaniu nowych treści. Ważne jest, aby rozwijać kompetencje poznawcze dziecka wspierające myślenie samodzielne, plastyczne i twórcze. Wskazuje, że jedną z aktywności umożliwiających realizację tego celu są samodzielnie prowadzone badania relacji między obiektami matematycznymi<sup>18</sup>. Takie możliwości daje edukacja matematyczna zorientowana na proces. Według Doroty Klus-Stańskiej sposób realizacji edukacji matematycznej zorientowanej na proces należy rozumieć:

[...] nie jako zbiór pojęć i twierdzeń, ale jako sposób myślenia, polegający na szukaniu nowych możliwości i relacji między danymi, oraz zdolność i gotowość do wykorzystywania takich strategii, jak: odnajdywanie podobieństw, działanie przybliżone, odkrywanie własności. Borykanie się z trudnością matematyczną jest zatem bardziej pytaniem o perspektywy niż o tożsamość z poznawczym wcześniej modelem. Uczeń częściej bada, niż stosuje, częściej pyta (również sam siebie, np. „A gdyby tak...?”), niż odpowiada („Powinno być tak a tak”), częściej próbuje, niż postępuje zgodnie ze wskazówkami<sup>19</sup>.

Bardzo zbliżone poglądy na edukację matematyczną odnajdujemy w pracach Danuty Zaremby, która matematycznych sukcesów edukacyjnych uczniów doszukuje się m.in. w umożliwieniu uczniom podążania drogą dochodzenia do nowych dla nich pojęć, własności i algorytmów w trakcie rozwiązywania problemów. Wszystko to można osiągnąć, jej zdaniem, umożliwiając uczniom, przy wykorzystaniu ich dotychczasowych doświadczeń, wykonywanie czynności ułatwiających uchwycenie istoty badanego zjawiska. Co więcej, przekonuje nas, że jest to prawie zawsze możliwe w matematyce szkolnej<sup>20</sup>.

W kontekście uczenia się przez badanie należy koniecznie zwrócić uwagę na jeszcze jedno niezwykle ważne zadanie edukacji matematycznej, czyli tzw. oswajanie z matematyką. Istotą oswajania z matematyką jest kształtowanie pozytywnych

<sup>16</sup> Edyta Gruszczyk-Kolczyńska, „O kryzysie edukacji matematycznej dzieci. Rozpaczliwe wołanie o działania naprawcze”. *Matematyka dla Dzieci* 1 (2016): 5.

<sup>17</sup> Zofia Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1 (Warszawa: WSiP, 1979), 49 i n.

<sup>18</sup> Alina Kalinowska, „Matematyczna aktywność badawcza uczniów klas początkowych. Między koncepcjami naukowymi a potocznymi”. *Problemy Wczesnej Edukacji* 3 (38) (2017): 82–101.

<sup>19</sup> Dorota Klus-Stańska, Marzenna Nowicka, *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej* (Warszawa: WSiP, 2013), 140.

<sup>20</sup> Danuta Zaremba, *Podstawy nauczania matematyki, czyli jak przybliżyć matematykę uczniom* (Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2006), 18.

skojarzeń emocjonalnych z nią związanych<sup>21</sup>, które jest możliwe dzięki prowadzeniu przez uczniów badań, zbieraniu doświadczeń, a przede wszystkim wspieraniu ich samodzielności poznawczej i poczucia własnej skuteczności. Urszula Oszwa przekonuje, że jest to jeden ze sposobów na pokonanie niechęci czy lęku przed matematyką<sup>22</sup>.

Prowadzenie badań w trakcie zdobywania wiedzy urasta do rangi zorganizowanej działalności zarówno ucznia, jak i nauczyciela, czyniąc z niej sposób pracy jednych i drugich. Pozwala to wnioskować, że „kształcenie przez badanie”<sup>23</sup> winno stanowić jeden ze sposobów myślenia o edukacji przyszłych pokoleń. Udostępnianie dziecku tego sposobu poznawania świata czyni z niego pełnoprawnego i odpowiedzialnego uczestnika procesu budowania własnej wiedzy, wspierając tym samym kulturę wiedzy kreowaną przez kolejne pokolenia.

## Matematyczna aktywność badawcza dziecka

Podstawą rozwoju jednostki jest jej własna aktywność. Zawdzięczamy jej nie tylko doświadczanie wszystkiego, co nas otacza, ale również doświadczanie samych siebie<sup>24</sup>. Poziom aktywności własnej jednostki warunkuje ilość zdobytych doświadczeń, a to z kolei oddziałuje na prędkość rozwoju<sup>25</sup>. Dlatego różnorodność uczniowskich doświadczeń, w tym również badań prowadzonych w trakcie uczenia się, staje się niezwykle ważna.

O znaczeniu aktywności własnej jednostki podczas uczenia się matematyki przekonywała nas w ubiegłym stuleciu Zofia Krygowska. Jej zdaniem osiągnięcie zamierzonych celów edukacyjnych jest uwarunkowane doświadczaniem przez uczniów różnych form aktywności<sup>26</sup>. Twierdziła ona:

[...] im bardziej racjonalnie z punktu widzenia matematyki i psychologii organizujemy pogładowe podstawy matematyki elementarnej, im poprawniej ukierunkowujemy tę pogładowość

---

<sup>21</sup> Dąbrowski, *Pozwólmy dzieciom myśleć*; Edyta Gruszczyk-Kolczyńska, *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki: przyczyny, diagnoza, zajęcia korekcyjno-kompensacyjne* (Warszawa: WSiP, 1992); Klus-Stańska, Nowicka, *Sensy i bezsensy*.

<sup>22</sup> Urszula Oszwa, *Lęk przed matematyką. Poglądy, badania, rozwiązania* (Lublin: Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, 2020), 227 i n.

<sup>23</sup> Termin wprowadzony przez S. Palkę.

<sup>24</sup> Janusz Trempała, *Psychologia rozwoju człowieka* (Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2011), 117.

<sup>25</sup> Por. Maria Przetacznikowa, *Podstawy rozwoju psychicznego dzieci i młodzieży* (Warszawa: PZWS, 1973), 174; Mirosław Kofta, „Orientacja podmiotowa. Zarys modelu”. W: *Wychowanek jako podmiot działań*, red. M. Kofta (Warszawa: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, 1989), 35; Anna Matczak, *Wprowadzenie do psychologii. Podręcznik dla nauczycieli* (Warszawa: WSiP, 1992), 156; Anna Brzezińska, *Spółeczna psychologia rozwoju* (Warszawa: Wydawnictwo Naukowe Scholar, 2000), 69.

<sup>26</sup> Zofia Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 2 (Warszawa: WSiP, 1977), 12.

w stronę właściwej matematyzacji, tym pełniej i łatwiej aktywizujemy wyobraźnię matematyczną i myślenie matematyczne ucznia<sup>27</sup>.

To właśnie zasadzie świadomego i aktywnego udziału ucznia w procesie nauczania Krygowska przypisywała nadrzędną rolę w stosunku do innych uznanych w teorii pedagogicznej zasad. Czyniła ją odpowiedzialną za nauczanie koncentrujące uwagę uczniów na kształtowaniu technik uczenia się matematyki, twierdząc, że to właśnie uczenie się matematyki czyni aktywność ucznia zorganizowaną<sup>28</sup>. Bardzo silnie podkreślała „twórcze doświadczanie” w zakresie edukacji matematycznej, które – jej zdaniem – pozwoli na operatywne przyswojenie matematycznej wiedzy, operatywne opanowanie metody matematycznej oraz intensywny rozwój możliwości i zainteresowań dziecka<sup>29</sup>.

Wśród pojawiających się w toku uczenia się matematyki aktywności uczniów profesor Krygowska szczególne znaczenie przypisywała aktywności twórczej. Jej zdaniem uczeń twórczy matematycznie dostrzega i formułuje problemy, konstruuje i definiuje pojęcia, odkrywa subiektywnie nowe twierdzenia, uogólnia oraz stosuje matematykę do rozwiązywania problemów z innych dziedzin, w tym także w sytuacjach niestandardowych<sup>30</sup>. To z tą kategorią silnie wiązała ważne dla działalności matematycznej aktywności i wskazywała je jako możliwe do prowokowania na wszystkich poziomach nauczania. Wśród nich wyróżniła dostrzeganie i wykorzystywanie analogii, schematyzowanie, definiowanie pojęć, interpretowanie i racjonalne wykorzystywanie definicji, dedukowanie i redukowanie, kodowanie, konstruowanie i racjonalne stosowanie języka symbolicznego, algorytmizowanie oraz racjonalne posługiwanie się algorytmami<sup>31</sup>. Określiła je jako specyficzne dla działalności matematycznej i nazywała aktywnościami matematycznymi. Przekonywała, że nie należy ich poddawać wzajemnej izolacji, bo może to prowadzić do zagubienia operatywności działań matematycznych uczniów. Przecież w toku pracy twórczej ucznia aktywności te przenikają się wzajemnie i często uzupełniają, co jest ich niewątpliwą zaletą.

Jak zatem będzie się ujawniała matematyczna aktywność badawcza ucznia? By uzyskać odpowiedź na to pytanie, odwołam się do słów Kalinowskiej, która matematyczną aktywność badawczą ucznia rozumie „jako jego intuicyjnie prowadzone obserwacje określonych zmian obiektów matematycznych w celu odkrycia i głębszego rozumienia relacji i struktur matematycznych”<sup>32</sup>.

---

<sup>27</sup> Tamże, 3.

<sup>28</sup> Tamże, 4.

<sup>29</sup> Tamże, 12–13.

<sup>30</sup> Tamże, 14.

<sup>31</sup> Zofia Krygowska, Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich, *Dydaktyka Matematyki* 6 (1986).

<sup>32</sup> Kalinowska, *Matematyczna aktywność*, 86.



Zespalaając definiowane przez Krygowską aktywności matematyczne oraz rozumianą przez Kalinowską aktywność badawczą w zakresie matematyki, uzyskujemy taki obszar działalności ucznia, w którym prowadzone obserwacje określonych zmian obiektów matematycznych pozwalają na osiągnięcie celu, gdy uczeń wykorzysty specyficzne dla działalności matematycznej aktywności. To powoduje, że aktywności matematyczne stają się narzędziem umysłu prowadzącym do odkrycia i głębszego rozumienia relacji i struktur matematycznych.

W tej sytuacji obowiązki nauczyciela możemy zawrzeć w trzech obszarach jego działalności, tj. planowanie, organizowanie i kontrolowanie przebiegu aktywnego uczenia się matematyki przez badanie. Pociąga to za sobą konieczność analizy teoretycznej pojęć, praw, reguł czy własności i przygotowanie opartych na niej właściwych zadań lub problemów badawczych. Listę prac dopełnia potrzeba zorganizowania właściwej przestrzeni badawczej i kontrola rozumiana jako stałe monitorowanie przebiegu podejmowanych przez uczniów działań. Jednak kontrola pracy badawczej musi być na tyle dyskretna, aby nie ograniczała samodzielnej pracy ucznia. Zadanie nauczyciela w tej kwestii sprowadza się do sugerowania uczniom innych możliwości prowadzących do rozwiązania rozważanego problemu. W tym ujęciu nauczyciel staje przed trudnym zadaniem dydaktycznym, sprowadzającym jego aktywność do poszukiwania i urzeczywistniania sposobów i środków postępowania dydaktycznego, które wesprą harmonijne uruchomienie dotychczasowej wiedzy matematycznej uczniów i połączenie jej z nową, sformułowaną na podstawie przeprowadzonych badań.

## **Matematyczna działalność badawcza dziecka**

Początkiem inicjowanej przez nauczyciela działalności badawczej dziecka jest zadanie lub problem badawczy, który wskazuje wyraźną potrzebę podjęcia pewnych działań poznawczych ocenianych jako wartościowe do realizacji<sup>33</sup>. Sam proces badawczy charakteryzuje pewna etapowość, którą zawsze rozpoczynamy od zapoznania się ze sformułowanym zapytaniem. Zapoznaniu powinno towarzyszyć gromadzenie, przetwarzanie i analizowanie danych zawartych w postawionym zadaniu czy problemie badawczym. Po uporządkowaniu informacji pojawiają się pierwsze, wstępne przypuszczenia, które możemy nazwać wstępnymi hipotezami. Warto dodać, że ich trafność w dużej mierze zależy od dziecięcych eksploracji obiektów badawczych i wcześniej nagromadzonych doświadczeń. Kolejnym etapem jest sprawdzenie hipotez i sformułowanie wniosku z przeprowadzonego badania.

---

<sup>33</sup> Andrzej Góralski, *Twórcze rozwiązywanie zadań* (Warszawa: PWN, 1989), 18.



Etapem wieńczącym działalność badawczą uczniów jest prezentacja wyników podlegająca nauczycielskiej weryfikacji<sup>34</sup>.

Małgorzata Żytko wskazuje, że najmłodszy uczniowie podczas rozwiązywania problemów na etapie poprzedzającym symboliczną prezentację uzyskanych wyników powinni korzystać z różnorodnych sposobów. Wśród dostępnych w edukacji wczesnoszkolnej wymienia: materialny, wizualny, społeczny i werbalny. Materialny dotyczy konkretnych obiektów rzeczywistych, które ułatwią uczniom budowanie modeli sytuacji przedstawionych w zadaniu. To poprzez manipulację obiektami uczniowie dostrzegają pewne relacje między obiektami, a także praktycznie sprawdzają przyjęte hipotezy. Wizualny sposób wiąże się z rysunkami, schematami, a czasami z diagramami ułatwiającymi wizualizację problemu. Społeczny dotyczy współpracy w grupie, która umożliwia inspirowanie się spostrzeżeniami innych, budowanie pytań pomocniczych wymagających odpowiedzi, formułowanie pierwszych przypuszczeń dotyczących planowanego rozwiązania czy obserwowanie innych i korzystanie z zaproponowanych przez nich rozwiązań. Sposób werbalny polega z kolei na wykorzystaniu wyjaśnień słownych, dyskusji na argumenty w sprawie przyjętego stanowiska i zaproponowanego rozwiązania problemu<sup>35</sup>. Wskazane cztery płaszczyzny aktywności poznawczej ucznia, krzyżując się ze sobą, budują przestrzeń, w której niezbędna staje się koncentracja nauczyciela na takim kreowaniu środowiska uczenia się, w którym język, obraz, obiekty rzeczywiste i praca zespołowa będą przeplatającymi się warunkami wspierającymi działalność badawczą ucznia. Zwróćmy uwagę, że w taki sposób otrzymujemy odmienny kształt edukacji matematycznej od krytykowanej papierowej edukacji.

Najtrudniejszym momentem procesu badawczego jest sformułowanie hipotezy. Ten etap procesu badawczego wiąże się ze zdolnością badacza do dostrzegania regularności i formułowania uogólnień, których początkiem zawsze jest intuicja. Jerzy Tocki intuicję określa mianem „drogowskazu”, który ukierunkowuje ruch myśli matematycznych oraz ułatwia rozumienie i stosowanie pojęć matematycznych<sup>36</sup>. Rangę intuicyjnych rozumowań w nauczaniu dostrzegała również Krygowska, czyniąc je niezbędnymi do zrozumienia stwierdzeń matematycznych<sup>37</sup>. Ukierunkowany przez intuicję ciąg czynności myślowych jest uwarunkowany kilkoma czynnikami. Z pewnością zależy od możliwości poznawczych jednostki,

---

<sup>34</sup> Kenneth D. Moore, *Effective Instructional Strategies: From Theory to Practice* (Thousand Oaks, CA: SAGE, 2005), pobrano z: <https://books.google.pl/> [dostęp: 21.06.2021].

<sup>35</sup> Małgorzata Żytko, *Edukacja matematyczna – działanie, odkrywanie, mówienie w praktycznym kontekście*, 2021, pobrano z: <http://matematykawkolorach.edukacjananowo.pl/edukacja-matematyczna-dzialanie-odkrywanie-mowienie-w-praktycznym-kontekście> [dostęp: 15.12.2023].

<sup>36</sup> Jerzy Tocki, *Struktura procesu matematycznego*, cz. 1 (Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, 2006), 59–60.

<sup>37</sup> Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1, 146.

jej dotychczasowych doświadczeń związanych z matematyką, a przede wszystkim od jej dojrzałości umysłowej.

Uwzględniając dojrzałość umysłową jednostki w zakresie matematyki, Krygowska wyróżniła trzy typy rozumowań występujących podczas formułowania hipotez, tj. wnioskowanie empiryczne, rozumowanie intuicyjne i rozumowanie formalne. Pierwszy pojawia się w sytuacji, gdy na podstawie przeprowadzonych doświadczeń w świecie materialnym i uzyskanych w trakcie obserwacji wyników formułujemy hipotezę matematyczną, a także wtedy, gdy po wykonaniu ciągu prób matematycznych (np. pewnych obliczeń) dostrzegamy pewną zależność i podpierając się rozumowaniem indukcyjnym, formułujemy swoje spostrzeżenia w postaci hipotezy matematycznej, postępując tak jak w naukach przyrodniczych<sup>38</sup>. O rozumowaniu intuicyjnym mówimy wówczas, gdy uczeń do sformułowania hipotezy wykorzystuje obrazy pojęć często nieoparte formalnymi definicjami matematycznymi, by na ich podstawie przeprowadzać rozumowanie czy uzasadniać swoje wnioski<sup>39</sup>. Ostatnim jest rozumowanie formalne, któremu towarzyszy pełna świadomość przyjętej podstawy dedukcji. W tym wypadku każdy sformułowany wniosek jest precyzyjnie wyprowadzany z poznanych wcześniej twierdzeń i definicji<sup>40</sup>. Każdy ze wskazanych przez Krygowską typów rozumowań ma szansę wystąpić w edukacji wczesnoszkolnej. Jednak to wnioskowaniu empirycznemu i rozumowaniu intuicyjnemu przypisujemy pierwszeństwo. Zarówno we wnioskowaniu empirycznym, jak i w rozumowaniu intuicyjnym czynnością poprzedzającą formułowanie hipotezy jest matematyzacja<sup>41</sup>.

Matematyzacją właściwą dla najmłodszych uczniów będzie konstrukcja jeszcze na w pół pogładowego schematu myślowego, która nie powstała z żadnej teorii matematycznej, nie jest schematem matematycznym i nie może być bezpośrednio włączona do żadnej teorii. Krygowska nazwała ją matematyzacją wstępną, prymitywną lub pogładową i oceniła jako niezwykle istotną dla konstrukcji wiedzy matematycznej ucznia, o ile od samego początku została ukierunkowana na właściwą późniejszą matematyzację<sup>42</sup>. Uważam za w pełni trafne słowa Krygowskiej, że „matematyzację doświadczeń i intuicji ucznia powinno się przeprowadzać możliwie wcześnie, możliwie radykalnie, możliwie od początku czysto z punktu widzenia matematyki, choć zawsze w sposób naturalny”<sup>43</sup>.

Powyższa analiza czynności umysłowych ujawniających się w działalności dziecka w trakcie prowadzenia badań matematycznych zarysowuje ważny obszar aktywności poznawczych możliwych i koniecznych do uruchomienia w edukacji

<sup>38</sup> Tamże, 137.

<sup>39</sup> Tamże, 144.

<sup>40</sup> Tamże, 145.

<sup>41</sup> Tocki, *Struktura procesu matematycznego*, 80.

<sup>42</sup> Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1, 49.

<sup>43</sup> Tamże, 80.

szkolnej. W swojej naturze dzieci zbliżone są do aktywności matematyków zajmujących się profesjonalnie tą dziedziną wiedzy, bo przecież, tak jak w ich wypadku, istotną rolę odgrywają intuicja, umiejętność formułowania przypuszczeń i wątplenie w nie, a nawet błędzenie i wykorzystywanie pomyłek do dalszych rozważań.

## Konkluzja

Najmłodszy uczeń, ucząc się matematyki przez badania, ma szansę modelować umysł otwarty na poszukiwanie i dostrzeganie relacji między obiektami matematycznymi, konstruowanie uogólnień i abstrahowanie, definiowanie pojęć, refleksyjny namysł nad rezultatami swojej pracy i wykorzystanie go do dalszych poszukiwań, prowadzenie dyskusji opartej na argumentach, stawianie pytań i dyskutowanie o możliwych rozwiązaniach czy budowanie własnych strategii radzenia sobie z zadaniami niestandardowymi. Jednak cały proces badawczy w głównej mierze opiera się na wnioskowaniu empirycznym oraz rozumowaniu intuicyjnym. Są one najczęściej wykorzystywanym sposobem myślenia podczas dziecięcego odkrywania pojęć, reguł, własności matematycznych czy relacji między obiektami matematycznymi. Praktycznie niedostępne na poziomie edukacji wczesnoszkolnej formalne teorie matematyczne nie mogą stanowić podstawy dziecięcych poszukiwań i rozważań, czyniąc tym samym uczniowskie badania w świecie matematyki odmiennymi od tych prowadzonych przez profesjonalistów. Różnica nie dotyczy tylko treści matematycznych, dotyczy przede wszystkim sposobu prowadzenia rozumowania i podstaw teoretycznych, od których rozumowanie się rozpoczyna. Rodzi się zatem obawa, że dominująca w nauczaniu matematyki najmłodszych uczniów pogładowość może stać się przyczyną specyficznych trudności ujawniających się pod wpływem stopniowo formalizowanej matematyki szkolnej. Oczywiście istnieje takie zagrożenie, ale tylko wtedy, gdy uczenie się przez badanie zdominuje inne rozwiązania dydaktyczne, na przykład takie, które kształtują umiejętność interpretowania i racjonalnego używania definicji.

Uczenie się przez badanie bardzo dobrze wpisuje się we współczesne koncepcje edukacji matematycznej na pierwszym etapie edukacyjnym. Umożliwia uczniom inicjowanie i modyfikowanie różnych sposobów działania<sup>44</sup>, pozwala gromadzić wiele różnorodnych doświadczeń<sup>45</sup>, wspiera samodzielność w konstruowaniu wiedzy<sup>46</sup>, w zakresie poszukiwania bardziej ekonomicznych strategii rozwiązywania

---

<sup>44</sup> Manu Kapur, Pee L.L. Toh, „Productive failure: From an experimental effect to a learning design”. W: *Educational Design Research – Part B: Illustrative Cases*, red. Tjeerd Plomp, Nienke Nieveen (Enschede: SLO, 2013), pobrano z: <http://international.slo.nl/bestanden/Ch17.pdf> [dostęp: 15.04.2021].

<sup>45</sup> Gruszczyk-Kolczyńska, „O kryzysie edukacji”, 5–40.

<sup>46</sup> Dorota Klus-Stańska, *Konstruowanie wiedzy w szkole* (Olsztyn: Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego, 2000).

zadań, rozwija krytyczne myślenie<sup>47</sup> czy wreszcie wspiera „twórcze doświadczanie” matematyki<sup>48</sup>. Ponadto sam proces badawczy jest bardzo atrakcyjnym sposobem zdobywania wiedzy: wiąże się z pewną tajemnicą (zagadnieniem do rozwiązania), trudnością do pokonania oraz radością osiągniętego celu. To czyni go wartościową metodą uczenia się matematyki.

**S t r e s z c z e n i e:** Współczesne trendy matematycznego kształcenia najmłodszych uczniów mocno podkreślają aktywność poznawczą i wskazują, że to właśnie ona jest warunkiem koniecznym prawidłowego rozwoju kompetencji matematycznych. W tym kontekście uczenie się matematyki należy rozumieć jako budowanie własnych struktur umysłowych jednostki. W tak rozumianą edukację matematyczną dobrze wpisuje się uczenie przez badanie.

W artykule zaprezentowano zagadnienie zorganizowanej, matematycznej działalności badawczej uczniów na pierwszym etapie edukacyjnym. Tekst jest próbą przekonania czytelnika, że mimo niedojrzałości intelektualnej dziecko jest zdolne do prowadzenia badań, w trakcie których uruchamia zachowania zbliżone do tych przypisywanych profesjonalnym matematykom. Przedstawiono także zarys genezy koncepcji kształcenia przez badanie oraz poruszono zagadnienia matematycznej aktywności badawczej dziecka i procesów umysłowych uruchamianych w trakcie uczenia się przez badanie.

**S ł o w a   k ł u c z o w e:** edukacja wczesnoszkolna, edukacja matematyczna, matematyczna aktywność badawcza ucznia

## Bibliografia

- Aebli, Hans. *Dydaktyka psychologiczna*. Warszawa: PWN, 1982.
- Badanie umiejętności podstawowych uczniów klas trzecich. Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*. Red. Dąbrowski, Mirosław. Warszawa: CKE, 2009
- Bereźnicki, Franciszek. *Dydaktyka kształcenia ogólnego*. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls”, 2004.
- Bruner, Jerome S. *Poza dostarczone informacje. Studia z psychologii poznawania*, tłum. Barbara Mroziak. Warszawa: PWN, 1978.
- Brzezińska, Anna. *Spoleczna psychologia rozwoju*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe Scholar, 2000.
- Dąbrowski, Mirosław. *Pozwólm dzieciom myśleć*. Warszawa: CKE, 2008.
- Góralski, Andrzej. *Twórcze rozwiązywanie zadań*. Warszawa: PWN, 1989.
- Gruszczyk-Kolczyńska, Edyta. *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki. Przyżyny, diagnoza, zajęcia korekcyjno-kompensacyjne*. Warszawa: WSiP, 1992.
- Gruszczyk-Kolczyńska, Edyta. „O kryzysie edukacji matematycznej dzieci. Rozpaczliwe wołanie o działania naprawcze”. *Matematyka dla Dzieci* 1 (2016): 5–40.
- Hessen, Sergiusz. *Podstawy pedagogiki*. Warszawa: Nakład Naszej Księgarni Sp. Akc. Związku Nauczycielstwa Polskiego, 1931.
- Kalinowska, Alina. „Matematyczna aktywność badawcza uczniów klas początkowych. Między koncepcjami naukowymi a potocznymi?”. *Problemy Wczesnej Edukacji* 38 (3) 2017: 82–101.

<sup>47</sup> Paul Lockhart, *Mathematician's Lament* (New York: Bellevue Literary Press, 2009).

<sup>48</sup> Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 2, 12.

- Kalinowska Alina. *Pozwólmy dzieciom działać. Mity i fakty o rozwijaniu myślenia matematycznego*. Warszawa: CKE, 2010.
- Kapur, Manu, Toh, Pee L.L. „Productive failure: From an experimental effect to a learning design”. W: *Educational Design Research – Part B: Illustrative Cases*, red. Tjeerd Plomp, Nienke Nieveen. Enschede: SLO, 2013. Pobrano z: <http://international.slo.nl/bestanden/Ch17.pdf> [dostęp: 15.04.2021].
- Karpiński, Marcin, Zambrowska, Małgorzata. *Nauczanie matematyki w szkole podstawowej. Raport z badania*. Warszawa: IBE, 2015.
- Klus-Stańska D., *Konstruowanie wiedzy w szkole*. Olsztyn: Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego, 2000.
- Klus-Stańska, Dorota, Nowicka, Marzenna. *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej*. Warszawa: WSiP, 2013.
- Kofta, Mirosław. „Orientacja podmiotowa. Zarys modelu”. W: *Wychowanek jako podmiot działań*, red. Mirosław Kofta. Warszawa: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, 1989.
- Krygowska, Zofia. „Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich”. *Dydaktyka Matematyki* 6 (1986): 25–41.
- Krygowska, Zofia. *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 1*. Warszawa: WSiP, 1979.
- Krygowska, Zofia. *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 2*. Warszawa: WSiP, 1977.
- Lockhart, Paul. *Mathematician's Lament*. New York: Bellevue Literary Press, 2009.
- Matczak, Anna. *Wprowadzenie do psychologii. Podręcznik dla nauczycieli*. Warszawa: WSiP, 1992.
- Moore, Kenneth D. *Effective Instructional Strategies: From Theory to Practice*. Thousand Oaks, CA: SAGE, 2005. Pobrano z: <https://books.google.pl/> [dostęp: 21.06.2021].
- Okoń, Wincenty. „Kształcenie wielostronne”. W: *Encyklopedia pedagogiczna*, red. Wojciech Pomykało. Fundacja Innowacja, Warszawa 1993.
- Oszwa, Urszula. *Lęk przed matematyką. Poglądy, badania, rozwiązania*. Lublin: Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, 2020.
- Palka, Stanisław. „Kształcenie przez badanie w praktyce szkolnej”. *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego. Prace Pedagogiczne* 1 (1984).
- Przetacznikowa, Maria. *Podstawy rozwoju psychicznego dzieci i młodzieży*. Warszawa: PZWS, 1973.
- Tocki, Jerzy. *Struktura procesu matematycznego, cz.1*. Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, 2006.
- Trempała, Janusz. *Psychologia rozwoju człowieka*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2011.
- Zaremba, Danuta. *Podstawy nauczania matematyki, czyli jak przybliżyć matematykę uczniom*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2006.
- Żytka, Małgorzata. *Edukacja matematyczna – działanie, odkrywanie, mówienie w praktycznym kontekście* (2021). Pobrano z: <http://matematykawkolorach.edukacjananowo.pl/edukacja-matematyczna-dzialanie-odkrywanie-mowienie-w-praktycznym-kontekście> [dostęp: 15.12.2023].