PRINCIPIA LXVIII (2021)
PL-ISSN 0867–5392
DOI 10.4467/20843887PI.21.002.18692

Gottfried Wilhelm Leibniz

O szacowaniu rzeczy niepewnych[1]

Wrzesień 1678

Gra jest sprawiedliwa, jeśli stosunek nadziei i lęku jest taki sam dla każdego gracza. W sprawiedliwej grze nadzieja jest tyle warta, za ile została kupiona, ponieważ sprawiedliwe jest kupić rzecz za tyle, ile jest warta, a wartość lęku jest taka, jaka jest cena nadziei.

Aksjomat. Jeśli gracze postępują w sposób na tyle podobny, by nie można było wskazać między nimi różnicy innej, niż tylko wynik (*eventus*), to stosunek nadziei i lęku jest taki sam [dla każdego gracza].

> Można pokazać to na podstawie Metafizyki, ponieważ tam, gdzie jakieś rzeczy wydają się identyczne, [można] utworzyć o nich ten sam sąd (*judicium*), a to znaczy, że na tej samej zasadzie wyraża się sądy (*ratio opinandi*) o przyszłym wyniku. Sąd (*opinio*) o przyszłym wyniku jest nadzieją lub lękiem.

[1] Podstawą tłumaczenia jest wydanie *De incerti aestimatione*, [w:] G.W. Leibniz, *Philosophische Schriften: (1677–1690)*, cz. IV, Berlin 1999, s. 91–101. Pozostałe przypisy pochodzą od tłumacza. Autor dziękuje dr hab. Steffenowi Huberowi i dr hab. Leszkowi Wrońskiemu za cenne uwagi do niniejszego tłumaczenia.

Jeśli gracze tworzą równym wkładem wspólną pulę i jeśli każdy gra w ten sam sposób, a za ten sam wynik ustala się jednakową nagrodę lub karę, to [znaczy, że] gra jest sprawiedliwa.

Przy takich założeniach nadzieja jest dla każdego warta tyle, ile postawił.

Ponieważ ten, który postawił, kupił za jakąś cenę nadzieję, a kupił za sprawiedliwą cenę dlatego oczywiście, że gra jest sprawiedliwa (zgodnie z powyższym), więc tyle jest nadziei, za ile każdy ją kupuje, to znaczy: warta jest tyle, ile każdy postawił w grze.

Ogólnie rzecz biorąc przy takich założeniach, niezależnie od tego, czy pula została utworzona przy równych stawkach, czy otrzymano ją z innego źródła, oszacowanie nadziei jest przypadającą na danego gracza częścią [wspólnej] puli.

W oszacowaniu nadziei nie ma bowiem znaczenia, skąd bierze się pula (co ma znaczenie dla lęku przed stratą, który jest zerowy, gdy wkład gracza jest zerowy), więc tyle jest warta nadzieja, ile była ona warta, gdy pula była jeszcze tworzona przez graczy wnoszących swój wkład. Wówczas bowiem oszacowanie nadziei było równe przypadającej na jednego gracza części puli (czyli było równe temu, co każdy [rozpoczynając grę, wniósł do wspólnej puli], więc w chwili obecnej jest tak samo).

Innymi słowy, jeśli zakładamy, że cała pula przypada wszystkim, to wszyscy mają równą nadzieję. Gdyby zaś przerwali grę i chcieli rozdzielić pulę proporcjonalnie do swojej nadziei, czyli do prawa, jakie mogą sobie rościć do owej puli, wtedy każdemu należy się ta część wspólnej puli, która przypada na jednego gracza.

Im więcej jest grających o tę samą pulę, a gra jest sprawiedliwa, tym mniejsza nadzieja na wygraną. Jest ona szacowana na mniejszą, ponieważ im więcej jest graczy, tym mniejsza jest przypadająca na jednego gracza część.

Mniejszy jest jednak także lęk przed stratą, w przeciwnym razie gra nie byłaby sprawiedliwa.

Im więcej gra osób, które po równo dokładają się do puli, tym większa jest [suma] nadziei, lecz tym większy jest także lęk przed stratą.

> Mogę więc zyskać trzy monety stawiając jedną. Nie oznacza to jednak, bym postępował rozważniej od kogoś, kto gra przeciw jednemu. To zaś oznacza, że [wraz ze zwiększeniem ilości graczy] również lęk przed stratą uległ zwiększeniu.

Wyobraźmy sobie, że pula zostanie w całości rozdzielona na tyle części, ilu jest graczy, a częściami niech będą A, B, C itd. Oszacowanie nadziei będzie się równać $A+B+C$ podzielone przez liczbę części, czyli współgraczy, ponieważ pulą jest $A+B+C$, której część przypadająca na każdego gracza jest miarą jego nadziei [i lęku].

Tak samo jest wtedy, gdy [po podziale] puli na części pula nie została całkowicie wyczerpana. Jest bowiem zrozumiałe, że każdemu graczowi należy się jego część z reszty puli. [Należy mu się] więc przypadająca na jednego gracza część z całości i część tejże [reszty] wyjętej z $A+B+C$.

Jeżeli spodziewam się w równym stopniu (*aequali sperandi ratione*) albo A, albo B, oszacowanie nadziei będzie połową sumy *A* i *B*.

> To jest tak, jak gdyby było dwóch graczy, a ten sam wynik przyznał jednemu graczowi rzecz *A*, a drugiemu rzecz *B*.

Jeśli spodziewam się w równym stopniu albo *A*, albo *B*, albo *C*, to oszacowanie nadziei będzie trzecią częścią sumy $A+B+C$.

Dowodzi się tego, jak poprzednio.

Ogólnie jeśli z punktu widzenia naszego interesu mogą nastąpić różne rozłączne wyniki korzystne, to wtedy oszacowanie nadziei jest sumą tych spośród wszystkich wyników, które są dla nas korzystne, podzieloną przez liczbę [wszystkich] wyników.

I odpowiednio: jeśli z punktu widzenia naszego interesu mogą nastąpić niezależnie od siebie wyniki szkodliwe, to oszacowanie lęku jest sumą tych spośród [wszystkich] przypadków, które są dla nas szkodliwe, podzieloną przez liczbę wyników, czyli przypadków.

Do takiego wniosku można dojść w następujący sposób:

Prawdopodobieństwo jest stopniem możliwości. Nadzieja jest prawdopodobieństwem wejścia w posiadanie. Lęk jest prawdopodobieństwem poniesienia straty. Oszacowanie wartości rzeczy [o którą toczy się gra] jest równoznaczne z prawem, jakie może sobie każdy rościć do rzeczy.

Jeśli wiele osób łączy jedna rzecz, czyli jeśli rzecz jest wspólna wszystkim na podstawie równego prawa, to prawo każdej osoby do [wejścia w posiadanie] rzeczy jest [równoznaczne z] przypadającą na jedną osobę częścią [owej rzeczy].

Jeśli wielu członków wspólnoty porozumiewa się na równych warunkach co do wspólnej rzeczy, a nikt niczego nie zabrał wspólnocie jako całości, to wtedy ich prawo nie jest zmniejszone.

> Prawo [do rzeczy] przypada bowiem jeszcze w całości zgromadzeniu, a wszyscy jego członkowie są w identycznym położeniu. Rozumiem zaś przez to, że prawo przysługuje całemu zgromadzeniu w taki sam sposób, [to znaczy] że nie przyznało się komuś trzeciemu, ani nie przywłaszczyło sobie czegoś, co należy do całego zgromadzenia.

Należy to zrozumieć [na przykładzie] ludzi, którzy nie bardziej cierpią z powodu przegranej, niż cieszą się wygraną, to znaczy: tych, którym przegrana przeważnie nie szkodzi, to znaczy: którzy mogą kontynuować grę. Postawienie im takich warunków nie jest bowiem nakładaniem na nich ciężaru.

Narzucenie komuś konieczności gry jest jednak nałożeniem ciężaru, jeśli ducha nie zajmuje żadna wygrana, ani nie zwiększa się jego prawo [do posiadania rzeczy].

Rzecz toczy się więc bardziej dla tych, dla których zajmowanie ducha grą jest równoznaczne z przyjemnością, jaką im daje gra, niż dla tych, których gra zniewala.

Jeśli jest tylko sama nadzieja bez lęku, wtedy nie można uważać, że zajęcie ducha grą przynosi stratę. Dzieje się tak, kiedy ktoś inny dokłada się do puli. Gdy nadzieja jest większa niż lęk, to ten, kto ma wolny czas i może kontynuować grę, postępuje rozważnie, gdy rzuca kości[2].

Abstrahując jednak od rozważania tych rzeczy, które mogą w człowieku zwiększać lub zmniejszać zapał do gry, zwróćmy uwagę na tych graczy, którzy już rzucili kości, albo zwykli je rzucać często. To znaczy przyjmując, że gra podejmowana jest tak często, że ktokolwiek zechce znaleźć kupca swojej nadziei, znajdzie go łatwo, wystawiając ją na aukcji, będziemy twierdzić [co następuje]:

Nadzieja jest tyle warta, ile możliwość wejścia w posiadanie rzeczy.

Możliwość wejścia w posiadanie rzeczy we wszystkich wydarzeniach (*eventus*)[3] jest roszczeniem sobie prawa do posiadania całej rzeczy.

[2] Zwrot „rzucać kości” (*subire aleam*) oznacza tu „podjąć ryzyko”. Użycie tego zwrotu nie przesądza o wyborze rodzaju gry.

[3] Znaczenie *eventus* może być tutaj zbliżone do pojęcia partii grze. W zależności od kontekstu *eventus* oznacza pojedynczy wynik doświadczenia losowego (zdarzenie elementarne) albo zbiór wyników przypisanych do określonej partii, dzięki którym według Leibniza można ustalić jej numer. Ponieważ propozycje Leibniza będą zależeć od tego pomysłu, w dalszej części tłumaczę *eventus* jako „wydarzenie”, pozostawiając „wynik” tylko tam, gdzie chodzi o pojedynczy *eventus*.

Możliwość wejścia w posiadanie rzeczy wskutek jednego wyniku ma się do możliwości wejścia w posiadanie rzeczy wskutek wszystkich razem wziętych tak, jak możliwość zajścia jednego wyniku do możliwości zajścia wszystkich. Jeśli wydarzenia zachodzą z równą łatwością, czyli są równie możliwe, możliwość wejścia w posiadanie rzeczy wskutek jednego wyniku ma się do możliwości wejścia w posiadanie rzeczy wskutek dowolnego wydarzenia tak, jak [liczba] jeden do liczby [wszystkich możliwych] wydarzeń.

Jeśli wydarzenia zachodzą z równą łatwością, możliwość wejścia w posiadanie rzeczy wskutek jednego wyniku ma się do całkowitego prawa (a to całkowite prawo jest tym samym, co możliwość wejścia w posiadanie rzeczy wskutek dowolnego wydarzenia) jak [liczba] jeden do liczby wydarzeń.

Jeśli wydarzenia zachodzą z równą łatwością, to możliwość, że wskutek jednego wyniku dany gracz wejdzie w posiadanie rzeczy, równa się pewnej części [całościowego] prawa do rzeczy, czyli [równa części] oszacowania rzeczy podzieloną przez liczbę wydarzeń.

Tak samo to się rozumie, jeżeli przedstawię siebie jako spadkobiercę innych współgraczy. Jeśli roszczenia [każdego gracza] do posiadania całej rzeczy są równe, to tyle samo zyskam z powodu śmierci jednego, jak i innego gracza, a jeśli zdobędę całą rzecz z powodu śmierci wszystkich, to znaczy, że przez każdą poszczególną śmierć otrzymuję cząstkę puli przypadającą na danego gracza[4].

Pokazano więc, że na tyle jesteśmy w posiadaniu dobra, ile wynosi prawdopodobieństwo wejścia w posiadanie i na tyle jesteśmy oddzieleni od rzeczy, ile wynosi prawdopodobieństwo straty (o tym właśnie, jeśli dobrze pamiętam, wątpił Roberval), natomiast pozostałe problemy łatwo rozwiązujemy tak, jak następuje:

[4] Leibniz antycypuje tutaj rozważania zawarte w *De Aestimatione Redituum ad Vitam* z 1680 roku.

Twierdzenia:

1) Jeśli jest wiele wydarzeń, które mogą zajść z równą łatwością i wskutek jednego wyniku wejdę w posiadanie [całej] rzeczy, a we wszystkich pozostałych nie, to nadzieja będzie warta tyle, ile dowolna część wartości oszacowanej rzeczy podzielona przez liczbę wydarzeń.

Niech liczbą wydarzeń będzie n, rzeczą R, nadzieją s równą R/n, co wykazaliśmy przed chwilą, a mianowicie, że jeśli wydarzenia zachodzą z równą łatwością, możliwość wejścia w posiadanie rzeczy wskutek jednego wyniku jest równoznaczna z jakąś częścią oszacowanej wartości rzeczy podzieloną przez liczbę wydarzeń.

2) Jeśli wskutek niektórych spośród wielu wydarzeń, które mogą zajść z równą łatwością, wejdę w posiadanie rzeczy, a w innych [przypadkach] będę jej pozbawiony, to oszacowanie nadziei będzie tą częścią rzeczy, która w stosunku do całej rzeczy ma się tak, jak liczba wydarzeń, które mogą być korzystne w stosunku do liczby wszystkich wydarzeń.

Dlatego też $\frac{s}{R} = \frac{f}{N}$, czyli $s = \frac{fR}{N}$. Dowód jest oczywisty, ponieważ jeśli jest wiele korzystnych i równych [pod względem wartości] wydarzeń, to oszacowanie nadziei jest wielokrotnością oszacowanej wartości [jednego z nich], jeżeli równych wydarzeń jest wiele, bo to samo powtarza się wiele razy.

Należy dodać tutaj następującą uwagę, że kiedy mówiłem „jeśli jest wiele wydarzeń mogących zajść z równą łatwością", to [pisząc o] liczbie możliwych wydarzeń, miałem na myśli wszystkie możliwe wydarzenia.

Jeśli wszystkie wydarzenia zachodzą z równą łatwością i każdemu jest przypisana jakaś rzecz, którą otrzymam w razie jego zajścia, to nadzieja będzie równa jakiejś części sumy rzeczy przez liczbę [wszystkich] możliwych wydarzeń.

> $s = \frac{A+B+C \text{ itd.}}{n}$, czyli na przykład $\frac{A+B+C}{3}$. Dowód tej równości zależy od pierwszego twierdzenia, ponieważ rzecz A mogę posiąść tylko wskutek jednego wyniku, a w przypadku innych jestem jej pozbawiony. Dlatego oszacowanie nadziei [na zdobycie] rzeczy A wynosi $\frac{A}{n}$ i w ten sam sposób szacuje się nadzieję [na zdobycie] rzeczy B na $\frac{B}{n}$ i tak dalej. Całkowite oszacowanie nadziei wynosi $\frac{A+B \text{ itd.}}{n}$

Co do lęku przed stratą zachodzi to samo rozumowanie, co dla nadziei na posiadanie, ponieważ to, co dla mnie jest lękiem przed stratą, dla innych jest nadzieją na wejście w posiadanie.

Jeśli nadzieja i lęk równolegle kształtują się (*concurrant*) w rzeczach podlegających oszacowaniu według ceny, czyli wspólnej miary, to ostatnia nadzieja lub ostatni lęk jest różnicą między pierwszą nadzieją a pierwszym lękiem[5].

Wedle tych założeń, jeśli pierwsza nadzieja jest większa od pierwszego lęku, to ostatnia nadzieja jest przewagą nadziei nad lękiem, a ostatni lęk jest mniejszy niż zero. I przeciwnie: jeśli pierwszy lęk jest większy, ostatni lęk jest przewagą lęku nad nadzieją, a ostatnia nadzieja jest mniejsza od zera.

> Jeśli w następstwie wszystkich wydarzeń niektóre dają mi rzecz *A*, niektóre inne *B*, a pozostałe rzecz *C*, to całościowa nadzieja będzie zbiorem pojedynczych rzeczy wyjętych z liczby [wszystkich] wydarzeń, w których wyniku mógłbym je

[5] W tym miejscu Leibniz zmienił czystą nadzieję (*spes pura*) i czysty lęk (*metus purus*) na ostatnią nadzieję i ostatni lęk. Ma tu więc zachodzić równość: (s(1)-m(1)) = *spes pura*, gdzie s(1) i m(1) są nadzieją lub lękiem, które są nabywane w pierwszej partii.

otrzymać i podzielonym przez liczbę wszystkich możliwych wydarzeń. Tak [na przykład] liczbą wydarzeń, w których dane może być A, jest α, liczbą wydarzeń dla B jest β, liczbą wydarzeń dla C jest γ, liczbą wszystkich możliwych wydarzeń jest n, a nadzieja s równa jest $\frac{\alpha A+\beta B+\gamma C}{n}$. Dowód jest oczywisty, ponieważ to zupełnie tak, jakbyśmy założyli, że jest tyle rzeczy jak na przykład A, M, N, B, P, Q, C, R, S, ile wszystkich wydarzeń $\alpha + \beta + \gamma$. [Wobec tego nadzieja] s równa się $\frac{A+M+N+B+P+Q+C+R+S}{n}$.

Załóżmy teraz, że A, M i N są równoważne, czyli że $A = M = N$, i że liczbą powtórzeń A jest α tak, że $\alpha A = A+M+N$. Podobnie: jeśli $B = P = Q$ i liczbą powtórzeń B jest β, to $B+P+Q=\beta B$. Jeśli $C = R = S$, a liczbą powtórzeń C jest γ powtórzeń, to $C+R+S = \gamma C$. Wreszcie [otrzymujemy, że] $s = \frac{\alpha A+\beta B+\gamma C}{n}$, czego należało dowieść.

Jeżeli liczba możliwych wydarzeń jest większa niż liczba przypadków, którym przypisana jest jakaś rzecz, to w mocy pozostaje to, co już powiedziano wyżej, oraz to, że $\alpha + \beta + \gamma$ niekoniecznie równa się n.

Ponieważ to tak, jak gdyby pozostałym wynikom, którym nic nie jest przypisane, przypisać 0, które można bezkarnie dopisać lub skreślić, na przykład $s = \frac{\alpha A+\beta B+\gamma C+\delta 0}{n}$, gdzie $n = \alpha+\beta+\gamma+\delta$, co jest tym samym, co $s = \frac{\alpha A+\beta B+\gamma C}{n}$.

Jeśli dwie osoby grają pod tym warunkiem, że gdy pierwsza wygra trzy razy, to wygrywa w ogóle, a ja wygrałem dwa razy, to jaka jest moja nadzieja na wygraną w ogóle? To znaczy: jaka jest wartość mojej nadziei? Jasne jest, że jeśli drugi gracz jeszcze raz wygra, to będziemy równi. Zauważmy, że w ogólności całą grę kończy sześć partii na korzyść. Przez [partię] kończącą się na czyjąś na korzyść rozumiem to, że jeden z nas [w niej] wygrywa. Przyjmijmy teraz w grze zasadę, że konieczne jest, aby jeden gracz albo z drugim wygrał, albo przegrał. Na początku zanim któryś z nas wygra, jesteśmy równi. Następnie, kiedy wygram jedną partię, jest jasne, że drugi musi raz wygrać, abyśmy stali się znowu równi. Ma on jednak tylko pięć partii, więc jego ryzyko jest o wiele większe, niż gdyby miał ich więcej. Ten drugi wygrał i gra przywrócona jest do stanu równości, a doszedłszy do takiego stanu będzie to również tak samo, jak gdybyśmy ustalili już na początku, że kto wygra dwie partie, wygra grę. Tak należy to rozumieć, jeśli zrekompensowaną partię liczy się tak samo [jak poprzednią], inaczej zaś wtedy, gdy zwycięstwem w grze jest wygrana trzy razy z rzędu, której nie przerywa żadna wygrana przeciwnika.

Teraz jednak nie ma to znaczenia. Wystarczy przywrócić wszystko do stanu równości. Dlatego też w kolejnej partii rzecz powraca do równości, albo do stanu, w którym drugiemu potrzeba dwóch partii do równości. Załóżmy, że wygrałem także drugą partię i rzecz doszła do takiego stanu, w którym albo wygrywam, albo gra wraca do poprzedniego stanu. Gdy moja nadzieja jest nadzieją na wygraną w całej grze, jego nadzieja jest nadzieją na powrót do poprzedniego stanu, w którym potrzebował jednej partii do równości, a ja dwóch do zwycięstwa. Jemu potrzeba trzech partii do zwycięstwa, a mnie dwóch.

Jeśli na początku umówiliśmy się, że kto pierwszy wygra dwie partie, wygra grę, a ja wygrałem jedną partię. Oczywiste jest po tym zwycięstwie, że w drugiej partii nasze nadzieje nie są równe, ponieważ ja mam prawo spodziewać się wygranej, on zaś ma prawo mieć nadzieję na wyrównanie, to znaczy, że gdy ja mam prawo spodziewać się, że zdobędę całość, on – że zdobędzie połowę. Oszacowanie mojej nadziei jest zatem dwukrotnie większe od jego nadziei, dlatego należy mi się 2/3, a jemu 1/3, więc jemu potrzeba trzech korzystnych partii, mnie tylko jednej. Dlatego nie możemy oszacować liczby partii, ponieważ pojedyncza partia jest pod względem wartości niejednakowa, czyli drugiej nierówna.

Jest jednak trudność w powyższym zdaniu, a mianowicie: „ja mam prawo spodziewać się, że zdobędę całość, on – że zdobędzie połowę". Nie chodzi tu przecież o to, co spodziewam się już mieć, ale o to, co spodziewam się wygrać. Widzimy także, że każdy z nas już coś ma, ale coś nierównego temu, co posiada drugi gracz. Ja mam y, on x. Niech całą rzeczą będzie R [takie, że] $R = y+x$. [Wtedy] ja mam nadzieję na wygraną $R - y$, czyli R odjąć to, co już mam, czyli $y + x - y$, a więc x. Mam zatem nadzieję na zdobycie x. Nadzieja drugiego gracza wynosi $\frac{R}{2} - x$, czyli $\frac{R}{2}$ odjąć to, co już ma, czyli $\frac{y+x}{2} - x$, a więc $\frac{y-x}{2}$.

Dlatego ja mam nadzieję, że zdobędę x, a on, że zdobędzie $\frac{y-x}{2}$. Moje i jego korzyści, które możemy uzyskać w grze, muszą być równe, oczywiście po odjęciu tego, przez co jesteśmy nierówni, więc $x = \frac{y-x}{2}$, i $2x = y - x$, i $3x = y$. Przy tym $y = R - x$, więc $R = 4x$ i $x = \frac{R}{4}$. Z tego rachunku wynikałoby co innego, niż w powyższym, a mianowicie, że nadzieja powinna być oszacowana ze względu na liczbę [wszystkich] partii, które są potrzebne do zwycięstwa. Założono oczywiście, że ponad to, do czego każdy gracz ma prawo, każdy ma takie samo prawo do wygrania nowej zdobyczy w kolejnej partii, to znaczy, że zdobycz, którą wygrywa się w drugiej partii jest taka sama dla każdego. To jednak nie jest wcale pewne. Pewne jest to, że wszyscy mają na początku równą nadzieję na wygraną, potem zaś może być tak, że ten, kto wygrał, ma większą nadzieję na nową wygraną, niż drugi gracz.

Ale być może popełniam tu błąd w obliczeniach i dlatego zacznijmy od nowa: jeśli wygrałem jedną partię, oznacza to, że zdobyłem coś, co nazwiemy teraz y, a tym, o co należy teraz grać na mocy równego prawa, będzie $R - y$. Tak więc zróbmy nowy rachunek [wymagając], aby moja zdobycz była mi dana od razu i na pewno, abyśmy w pozostałej części gry walczyli już tylko o resztę i aby gra miała się toczyć tak samo, jak gdyby nic nie było dane natychmiast i na pewno, a całość gry toczyła się w sposób nieprzerwany zgodnie z regułami.

Jeżeli więc stawką jest $R - y$, to moje prawo do reszty jest równe $\frac{R-y}{2}$. Jeśli więc wygram, to [wygram] całe $R - y$ i mogę je dodać do posiadanego już *y*, otrzymując *R*. Ta obserwacja jednak niczego nas więcej nie uczy.

Na początku mam $\frac{R}{2}$. Moje pierwsze zwycięstwo ma dla mnie wartość *y*, mam więc $\frac{R}{2} - z$. Pierwsza porażka drugiego gracza ma wartość *z*, ma więc $\frac{R}{2} + y$, stąd: $\frac{R}{2} - z + \frac{R}{2} + y = R$, czyli $z = y$. Więc po pierwszej wygranej partii zwycięzca posiada $\frac{R}{2} + y$, zwyciężony $\frac{R}{2} - y$. Jeśli wygram drugą partię, zdobędę *v* i wtedy będę mieć wszystko, czyli: $\frac{R}{2} + y + v = R$. To znaczy, że $y + v = \frac{R}{2}$ i że drugi gracz nie będzie miał nic, czyli $\frac{R}{2} - y - z$, przy czym $\frac{R}{2} - y - v = 0$. Jeśli zostanę pokonany w drugiej partii, stracę *x*, czyli zdobędę $-x$. Przeciwnik otrzyma wtedy x. Ja będę mieć $\frac{R}{2} + y - x$, a przeciwnik: $\frac{R}{2} - y + x$. Tak więc rzeczy powrócą do stanu równości, a więc każdy będzie miał połowę prawa do całej puli, bo otrzymujemy, że $\frac{R}{2} + y - x$ lub $\frac{R}{2} - y + x = \frac{R}{2}$, więc $y - x = 0$, czyli $y = x$.

Zakładam dwie ewentualności zachodzące z równą łatwością: pierwszą, że stracę *x*, czyli [to samo, co] *y* i drugą, że wygram *v*, więc moja nadzieja na wygranie tego, czego jeszcze nie mam wynosi $\frac{\mp y \pm v}{2}$, czyli średnią różnicę między *v* i *y*. Ta nadzieja jest jednak tym samym, co wygrałem w pierwszej partii, bo nie wygrałem niczego innego, prócz nadziei na zwycięstwo łatwiejsze, niż drugiego gracza w drugiej partii. Dlatego $\frac{\mp y \pm v}{v} = y$, czyli $2y = \mp y \pm v$. [Znak] $\mp$ musi tu oznaczać $-$, a $\pm$ oznaczać $+$. W przeciwnym wypadku $y = -x$, czyli $v - y = 2y$, czyli $v = 3y$, podczas gdy wyżej $y + v$ równało się ono $\frac{R}{2}$. Więc $4y = \frac{R}{2}$, skąd wynika, że $y = \frac{R}{8}$. Kto wygrał teraz pierwszą partię $\frac{R}{2} + \frac{R}{8}$, ma i posiada, czyli $\frac{4R}{8} + \frac{5R}{8}$[6].

Jeśli od początku uważamy, że pierwsze zwycięstwo daje mi nadzieję albo na 1/2, gdy zostanę pokonany w drugiej partii, albo gdy wygram, na 1, to wartość nadziei po pierwszej wygranej wynosi $\frac{1/2 + 1}{2}$, czyli 3/4, co jest niespójne z uprzednim [wynikiem].

[6] Tutaj zamiast $\frac{4R}{8} + \frac{5R}{8}$ powinno znaleźć się prawdopodobnie: $\frac{4R}{8} + \frac{R}{8}$, a więc $\frac{5R}{8}$.

Należałoby przebadać jak najdokładniej, czy pytamy tu raczej o całość, czy o wygraną i przegraną.

Na początku mam nadzieję równą albo nadziei na zdobycie wszystkiego wskutek jednego wyniku w grze, albo na stracenie wszystkiego. Mam więc na początku [nadzieję na] $\frac{R+0}{2}$.

W pierwszej partii przypadło mi przez zwycięstwo coś, co nazwę y, więc przypadła mi nadzieja albo na wygranie wszystkiego, to znaczy (skoro już teraz mam połowę, czyli $\frac{R}{2}$ i y) na wygraną $\frac{R}{2} - y$, albo utratę y. Ale ta nadzieja to jest ilościowo y, więc $y = \frac{R/2 - y - y}{2}$, więc $2y = \frac{R}{2}$, czyli $y = \frac{R}{8}$.

Lecz wydaje się, że można odpowiedzieć na to rozumowanie tak, że y nie może być nadzieją samą dla siebie, ale trzeba określić je za pomocą czegoś innego. Dlatego powiedziano, że przypadła mi nadzieja na zdobycie dopełnienia nadziei na $\frac{R}{2}$ wraz z lękiem przed utratą tej nadziei. Wydaje się jednak, że nadzieja nie może być określona za pomocą tego rodzaju refleksji, [tzn.] w odniesieniu do samej siebie. Jeśli wyobrazić sobie, że gracze nie posiadają własności, ale dana jest im tylko nadzieja, a ten, kto pierwszy wygra partię, ma nadzieję na 1 lub 1/2, ten zaś, który pierwszy przegra, na 1/2 lub 0, to nadzieja pierwszego na wygraną wynosi 3/4, a drugiego 1/4. Jest to jednak prawda i właściwe zastosowanie [pojęcia nadziei], ponieważ nie można uważać, że któryś z graczy ma coś jeszcze poza swą nadzieją, a jeśli ktoś chciałby określić dla niego nadzieje alternatywne, które podano wyżej, to nie można uczynić lepiej, niż przeciwstawić sobie [obu] graczy w takiej sytuacji.

Jeśli oszacujemy nadzieję w odniesieniu do samej siebie tym wyżej wspomnianym sposobem, to zobaczymy, co wyjdzie na jaw, kiedy oszacujemy nadzieję drugiego gracza. Spodziewa się on zatem wygranej y lub przegranej v, która wynosi $3y$ a $y = \frac{R}{8}$, i $v = \frac{3R}{8}$. Jego nadzieja jest równa $\frac{y-v}{2}$, to znaczy $-y$, czyli $-R$. I rzeczywiście wygrał $-y$, to znaczy: stracił [y], ale niczego to nam nie wyjaśnia. Będzie nam [raczej] wystarczało pokazanie tego, jak oszacować całkowitą nadzieję.

Niech teraz zwycięstwo w grze następuje po trzech partiach. Oszacowanie nadziei na pierwszą wygraną to y, drugą (y), trzecią $((y))$. Z pierwszej partii otrzymuje się albo y, to znaczy $\frac{R}{2}$, albo (y), czyli $y = \frac{R}{4} + \frac{y}{2}$. W drugiej partii otrzymuje się albo y, albo $((y))$. To znaczy, że $(y) = \frac{y + ((y))}{2}$. Dlatego też $y = 2(y) - ((yy)) = \frac{R}{4} + \frac{y}{2}$, i stąd [nadzieja całkowita] będzie wynosić [7] $(y) = R + 4((y))$, czyli y. Wyprowadza się zawsze średnią z pierwszej i ostatniej nadziei: $(y) = \frac{y + ((y))}{2}$, $((y)) = \frac{(y)+(((yy)))}{2}$, $(((y))) = \frac{((y))+((((y))))}{2}$.

Jednakże dla właściwego zrozumienia sprawy [i] uproszczenia obliczeń [trzeba dodać, że te terminy średnie należą do] progresji arytmetycznej, której istota polega na tym, że połowa sumy dwóch argumentów równa jest jednej wartości średniej. Dlatego należy ustalić progresję arytmetyczną $\frac{R}{2}, y, (y), ((y)), (((y))), \ldots, R$, w której wartości średnich jest tyle, ile liczba wszystkich partii odjąć 1, czyli o jeden więcej, niż liczba partii. Różnicę między $\frac{R}{2}$ i y wyprowadza się dzieląc różnicę między $\frac{R}{2}$ i R, czyli między pierwszym i ostatnim argumentem, co jest [równe] $\frac{R}{2}$ podzielone przez liczbę terminów średnich, których tutaj (na tablicy) jest 5, więc pomiędzy pierwszym argumentem $\frac{R}{2}$ a y różnica jest równa $\frac{R}{10}$.

Przekład Grzegorz Słowiński