PRINCIPIA LXVII (2020): 87–118
PL ISSN 0867 5392
DOI 10.4467/20843887PI.20.004.13834

***Jerzy Pogonowski***

# Oswajanie patologii matematycznych

## Domestication of mathematical pathologies

Streszczenie

Terminy: *patologia*, *patologiczny* występują w tekstach matematycznych. Istotne jest to, że w odróżnieniu od negatywnych skojarzeń wiązanych z tymi terminami w życiu codziennym oraz w niektórych naukach (np. patologie społeczne, psychopatologie, itp.), w matematyce użycie tych terminów oznacza zwykle, że mamy do czynienia z czymś twórczym. Ten kreatywny aspekt patologii matematycznych jest tematem niniejszych refleksji. Dodam też uwagi dotyczące miar stopni dostępności poznawczej obiektów matematycznych. Niniejszy tekst opracowany został w ramach projektu badawczego NCN nr 2015/17/B/HS1/02232 *Aksjomaty ekstremalne: aspekty logiczne, matematyczne i kognitywne*. Prezentowany był podczas XI Polskiego Zjazdu Filozoficznego w Lublinie w 2019 roku.

*Słowa kluczowe*: obiekt patologiczny, kontrprzykład, oswajanie patologii

Summary

Certain mathematical objects are called paradoxical or pathological. Such terms have negative connotations in common usage, in psychology, and in social science. However, the situation is different in mathematics. Emergence of mathematical paradoxes or pathologies always indicates a creative moment in the process of mathematical discovery. The paper contains reflections on this creative aspect of mathematical pathologies, the process of their domestication, and the cognitive accessibility of mathematical objects. The work on this paper was sponsored by the National Scientific Center research

grant 2015/17/B/HS1/02232 *Extremal axioms: logical, mathematical and cognitive aspects*. The paper was presented during the 11th Polish Philosophical Congress in Lublin (2019).

*Keywords*: pathological object, counterexample, domestication of mathematical pathologies

## *Uwagi wstępne*

Matematycy nazywają niektóre z badanych przez siebie obiektów *patologicznymi*. Odróżniają się one od obiektów standardowych (normalnych, naturalnych), o których z kolei mawia się, że *dobrze się zachowują*. Bycie standardem jest uwarunkowane m.in. zasięgiem zastosowań oraz zgodnością z żywionymi wprzódy intuicjami. Patologie mogą być nieoczekiwane i niechciane, ale w wielu przypadkach są konstruowane celowo, dla ukazania zakresu obowiązywania twierdzeń oraz wysubtelnienia bądź modyfikacji akceptowanych intuicji matematycznych – wtedy stanowić mogą inspirację dla rozwoju nowych dziedzin matematyki. Patologie pełnią często rolę kontrprzykładów (ale nie każdy kontrprzykład nazywamy patologicznym). Patologie odróżniamy od wyjątków oraz obiektów ekstremalnych. Nie każdy „dziwny" obiekt lub własność nazywamy patologicznymi – dzieje się tak dopiero wtedy, gdy występuje jakaś poważna kolizja z żywionymi uprzednio intuicjami. Często większość obiektów w danej klasie to patologie, a obiekty standardowe, które zostały już dobrze poznane, stanowią mniejszość. Jednak także obiekty patologiczne bywają oswajane, co skutkuje pogłębieniem wiedzy matematycznej. Ów proces oswajania przebiega u profesjonalnych matematyków oczywiście inaczej niż w reszcie populacji. Uważam, że proces oswajania patologii jest jednym ze wskaźników roli matematyki w kulturze. Jest też frapującą oznaką zmian mocy poznawczych umysłu ludzkiego.

Przed bardziej szczegółowym omówieniem tematu potrzebne chyba jest uzasadnienie, dlaczego niniejszy tekst wysłany został do druku w czasopiśmie filozoficznym, którego czytelnicy niekoniecznie fascynują się osiągnięciami i ustaleniami matematyków. Dalsze rozważania dotyczą mianowicie procesu tworzenia pojęć i to z reguły pojęć dość skomplikowanych, którym towarzyszy aura paradoksalności. Wyłanianie się nowych pojęć, wymuszone niejako poprzez obiektywne sytuacje badawcze, a także celowe wprowadzanie nowych pojęć dla uzyskania większego ładu teoretycznego powinny przecież interesować filozofów i to nie tylko tych, którzy z afirmacją odnoszą się do rozważań logicznych. Także rozpoznawaniu paradoksalności pojęć i stwierdzeń filozof poświecić mógłby uwagę, gdyż jest ono świadectwem zmagań intelektualnych podmiotu poznającego, próbującego utworzyć spójny i adekwatny obraz badanej rzeczywistości, w rozważanym tu przypadku rzeczywistości matematycznej. Ciekawe są okoliczności historyczne, towarzyszące nazywaniu określonych obiektów patologicznymi lub stwierdzeń paradoksalnymi, a również okoliczności oswajania patologii i rozwiązywania paradoksów. Te ostatnie wiążą się m.in. z typową dla matematyków tendencją do tworzenia uogólnień. W literaturze znajdujemy też argumentację, iż rozważanie „całkiem dowolnych obiektów" (z włączeniem zatem tych, które traktowane są jako patologiczne) może być jedną z istotnych przyczyn niezupełności i nierozstrzygalności bogatszych teorii matematycznych (Friedman 1992).

Potrzebne jest chyba również usprawiedliwienie konieczności użycia w tekście pewnych terminów matematycznych, które mogą być większości filozofów mało znane lub wręcz całkiem obce. Staram się ograniczyć żargon matematyczny do niezbędnego minimum, jednak w pewnych przypadkach muszę przywołać konkretne przykłady, aby uniknąć mało treściwych ogólników. Gdy to możliwe, dodaję parę słów, przybliżających intuicyjny sens używanych pojęć matematycznych. Nie zakładam zarozumiale, że tekst będzie klarowny dla wszelkich filozofów, ale mam nadzieję, że może zaciekawić tych, którzy interesują się filozofią matematyki oraz problematyką refleksji nad paradoksami.

Stoję na stanowisku, że w matematyce nie ma obiektów *obiektywnie* patologicznych. To, że nazywamy jakiś obiekt patologicznym, jest jedynie sposobem mówienia, przekazuje informacje na temat naszego postrzegania własności rozważanego obiektu. Ponadto, patologie matematyczne są *oswajane* – obiekty uważane w pewnym okresie dziejów za patologiczne bywają później włączane do zasobu standardowych (naturalnych, normalnych, itp.) obiektów matematyki. Proces odwrotny raczej nie zachodzi – choć pewne konstrukcje mogą przepadać w zapomnieniu lub wypadać z głównego nurtu badań. Być może dobrym przykładem jest zastąpienie antycznej teorii proporcji przez współczesną teorię liczb rzeczywistych.

Deklaracja wyrażona w poprzednim akapicie oznacza m.in., że rozważana tu problematyka (czyli wykrywanie, kreowanie i oswajanie patologii) ujmowana jest z perspektywy epistemologicznej, a nie ontologicznej. Sądzę, że może być rozpatrywana niezależnie od przyjmowanego stanowiska w kwestii dyskutowanego w wielu pracach z filozofii matematyki dylematu, czy matematyka jest tworzona czy odkrywana. Wyliczenie argumentów na rzecz obu tych stanowisk (a także stanowisk kompromisowych, przyjmowanych przez niektórych matematyków) znaleźć można w rozdziale drugim pracy Pogonowski 2020a. Wśród owych kompromisowych stanowisk znajdujemy np. pogląd, że tworzymy aksjomaty oraz reguły dowodowe, odkrywamy zaś fakty wyrażone w twierdzeniach, albo że odkrywamy obiekty tylko do pewnego stopnia ich złożoności, a przekraczające ową złożoność tworzymy. Wybitny polski matematyk, Roman Duda, wypowiadający się też często na tematy filozoficzne, wyróżnia dwie postawy w dziejach matematyki: postawę skierowaną do wewnątrz, polegającą na upraszczaniu, porządkowaniu i uzupełnianiu materiału (przy czym istotną rolę pełnią czynniki estetyczne) oraz postawę skierowaną na zewnątrz, polegającą na przyjmowaniu bodźców ze świata oraz weryfikowaniu uzyskanych wyników matematycznych w konfrontacji ze światem zewnętrznym. Roman Duda pisze (Duda 2010, 43):

> Postawy, do wewnątrz i na zewnątrz, wiążą się też z problemem: matematykę tworzymy czy odkrywamy? Także i tutaj odpowiedź jest niejednoznaczna. Przy badaniu ciągu 1, 2, 3,… mamy silne wrażenie odkrywania, budując natomiast np. spektralną teorię homologii chyba matematykę tworzymy.

Zajmę się jedynie tymi sytuacjami, gdy termin *patologia* używany jest przez profesjonalnych matematyków. Nie wydaje się bowiem celowe branie pod uwagę opinii wyrażanych w interesującej nas sprawie przez osoby nie będące ekspertami matematycznymi. Ograniczę się także do rozpatrywania jedynie matematyki klasycznej, matematyka intuicjonistyczna jest tu poza obszarem rozważań.

Termin *patologiczny* bywa w matematyce używany czasem zamiennie z terminem *paradoksalny*. Ta zamienność wskazuje na to, iż istotne jest w tym użyciu występowanie jakiejś kolizji z żywionymi przekonaniami, intuicjami, oczekiwaniami. Naturalną tendencją krytycznego myślenia jest dążenie do wyjaśnienia przyczyn paradoksalności. Takie eksplikacje pociągają za sobą zmiany przekonań i wysubtelnienie intuicji. Pogląd, że paradoksy, antynomie oraz wieloznaczność są istotnymi czynnikami w rozwoju matematyki przedstawia książka Byers 2007, odwołująca się do najbardziej znanych w dziejach matematyki przypadków.

Niektóre patologie matematyczne są tak często wspominane w pracach popularyzujących matematykę, że stały się znane szerszemu ogółowi. Należą do nich m.in.: paradoksalny rozkład kuli trójwymiarowej podany przez Banacha i Tarskiego, krzywe Peana i Hilberta wypełniające kwadrat jednostkowy, trójkowy zbiór Cantora, funkcja Weierstrassa, będąca przykładem funkcji ciągłej nieróżniczkowalnej w żadnym punkcie.

Omawia się je w pracach popularnych w celu zainteresowania czytelników matematyką, często poprzestając na ogólnym opisie, jako obiektów „dziwnych” bez wnikania w techniczne szczegóły oraz bez analizy okoliczności historycznych towarzyszących ich pojawieniu się.

Dostępne są również bardziej specjalistyczne pozycje, prezentujące tego typu obiekty w różnych działach matematyki, np. Steen, Seebach 1995, Gelbaum, Olmsted 1990, 2003, Wise, Hall 1993, Kharazishvili 2006. Godne polecenia są też teksty dawniejsze, np. słynny artykuł Hansa Hahna z 1933 roku o kryzysie intuicji, przedrukowany m.in. w Hahn 1980 lub często cytowany tekst Henri Poincarégo o intuicji w logice i matematyce w jego książce *Wartość nauki* (Poincaré 1908). Filozofom z pewnością znana jest książka Lakatos 1976, ukazująca proces dochodzenia do ustalenia wyniku matematycznego (wzoru Eulera, podającego zależność między liczbami wierzchołków, ścian i krawędzi wielościanu) oraz proces precyzacji pojęć potrzebnych do sformułowania tego wyniku. Wnikliwą analizę zależności między intuicją matematyczną a matematycznymi patologiami zawiera artykuł Feferman 2000. Autor wskazuje na rolę arytmetyzacji analizy w pojawieniu się patologicznych obiektów geometrycznych i topologicznych. Szczegółowo dyskutuje też udział wybranych środków dowodowych (przede wszystkim różnych wersji aksjomatu wyboru) w uzyskiwaniu wyników odczuwanych jako paradoksalne w teorii mnogości i teorii miary.

Niniejszy tekst nie zawiera sformułowania żadnej rewolucyjnej tezy filozoficznej, gdyż wykraczałoby to poza moje kompetencje. Może natomiast być traktowany, jak sądzę, jako przyczynek do koncepcji zwracających uwagę na pragmatyczne aspekty uprawiania matematyki, uwzględniające kontekst jej powstawania i działalność profesjonalistów. Znakomity przegląd takich nowszych koncepcji stanowi w polskiej literaturze antologia Murawski 2002. W niniejszym tekście chciałbym przede wszystkim zwrócić uwagę ewentualnego czytelnika na twórczy aspekt patologii matematycznych. Staram się ustalić powody, dla których operowano kwalifikacją patologiczności, przywołuję przykłady oswajania patologii i wskazuję czynniki, które mogą być brane pod uwagę w charakterystyce stopnia dostępności do obiektów matematycznych, także tych nazywanych patologicznymi.

## *Rodzaje patologii*

Ze względu na sposób pojawienia się w matematyce obiekty określane jako patologiczne podzielić można na dwa rodzaje:

*Patologie pojawiające się samoistnie*. Tu dobrymi przykładami są liczby ujemne oraz urojone. Pojawiały się one w rozwiązaniach problemów arytmetycznych, lecz były początkowo uznawane za „nieuprawnione" obiekty, za środki, które pełnią rolę pomocniczą w obliczeniach, ale nie mają samoistnego bytu. Opatrywane były takimi epitetami jak: *fikcyjne, urojone, głuche, absurdalne*. Ich oswajanie trwało kilka stuleci, a nadanie im pełnoprawnego obywatelstwa w matematyce wiązało się zarówno z obserwacjami, iż są one niezbędne w coraz większej liczbie rozważań jak i z tym, że tworzą one dobrze określone struktury, domknięte na określone operacje matematyczne. Długotrwałe przechodzenie od statusu wykorzystywanego środka do statusu obiektu widzimy też np. w przypadku wielkości nieskończenie małych, które dopiero w XX wieku uzyskały precyzyjną reprezentację.

*Patologie konstruowane specjalnie*. Dla laików paradoksalne może wydawać się to, iż matematycy sami z rozmysłem kreują obiekty, które nazywają patologicznymi. Działania te są jednak w pełni racjonalne i motywowane np. chęcią ukazania zakresu obowiązywania twierdzeń lub wysubtelnienia intuicji dotyczących badanych pojęć. Tego typu patologie najczęściej noszą miano kontrprzykładów. Bardzo wiele tego typu „dziwnych" obiektów skonstruowano np. w topologii ogólnej (dyscyplinie matematycznej, w której rozważa się całkiem ogólne przestrzenie oraz ich przekształcenia), gdzie próby precyzyjnej charakterystyki tak intuicyjnych pojęć jak np. „składanie się z jednego kawałka" (spójność), ,,możliwość przeprowadzenia drogi między punktami" (łukowa spójność), „wymiar" pokazały, że proponowane formalne reprezentacje dopuszczają konstrukcje wychodzące poza intuicyjne pierwowzory. Również tego rodzaju patologie ulegają oswajaniu – dobrym przykładem jest chyba zbiór trójkowy Cantora, który obecnie jest traktowany przez zawodowych matematyków jako obiekt standardowy, mający liczne zastosowania w wielu działach matematyki. Konstrukcję tego zbioru można też dość łatwo opisać intuicyjnie: usuwamy z odcinka [0,1] środkowy przedział otwarty o długości 1/3, z pozostałych dwóch przedziałów usuwamy ich środkowe przedziały otwarte o długości 1/9, itd., czyli na każdym następnym etapie usuwamy środkowe przedziały otwarte o długości stanowiącej 1/3 długości przedziałów pozostałych na tym etapie. Zbiór trójkowy Cantora to część wspólna wszystkich zbiorów nieusuniętych na poszczególnych etapach konstrukcji.

W tekstach matematycznych spotykamy też określenie „dobrze zachowujący się obiekt" (*well behaving object*), a także określenie komparatywne „lepiej zachowujący się obiekt" (*better behaving object*). To również jedynie sposób mówienia, „dobre zachowanie" nie jest obiektywną własnością obiektów matematycznych. Określenie jakiegoś obiektu (funkcji, przestrzeni, itp.) jako „dobrze zachowującego się" zależy zatem od celu badań, jest uzależnione kontekstowo.

## *Sposoby mówienia o obiektach matematyki*

Jeśli chodzi o sposób mówienia o obiektach matematycznych, poświadczony w tekstach, to możemy wyróżnić następujące ich rodzaje:

*Standardy*. Obiekty uważane za normalne, wzorcowe, naturalne. Przykłady: liczby naturalne, całkowite, wymierne, rzeczywiste, zespolone, przestrzenie euklidesowe. Niestandardowe obiekty to np. niestandardowe modele arytmetyki (a także nieskończone elementy tych modeli).

*Obiekty typowe (autentyczne)*. W angielskiej literaturze nazywane *genuine objects* lub *generic objects*. Przy jednym rozumieniu to te obiekty, które są w większości w rozważanej klasie. Można też chyba proponować inne rozumienie: obiekty, z którymi najczęściej spotykamy się w praktyce badawczej oraz w zastosowaniach matematyki.

*Obiekty nieistotne*. To przeciwieństwo powyżej określonych obiektów typowych, a więc obiekty „pomijalne" (*negligible*), tworzące mniejszość w rozważanej klasie obiektów.

*Wyjątki*. Obiekty o szczególnym zestawie własności, bądź obiekty nie mieszczące się w ustalonej klasyfikacji. Np.: tzw. grupy sporadyczne, czyli 26 grup, które pozostają poza kilkoma klasami proponowanymi w klasyfikacji wszystkich prostych grup skończonych. Prostszym przykładem obiektu wyjątkowego może być liczba 2, jako jedyna parzysta liczba pierwsza.

*Obiekty ekstremalne*. Obiekty posiadające pewne własności w stopniu maksymalnym lub minimalnym. Np.: rozważane w logice matematycznej modele nasycone (w intuicyjnym sensie „bogate", ponieważ realizowanych jest w nich wiele tzw. typów, czyli, z grubsza mówiąc, semantycznych charakterystyk elementów) lub modele atomowe (modele w intuicyjnym sensie „ubogie", w których z kolei realizowanych jest mało typów), lub znane wszystkim bryły platońskie (jako obiekty zalecające się maksymalnością symetrii).

*Obiekty zdegenerowane*. Przez obiekt zdegenerowany rozumie się taki obiekt z danej klasy, który własności przysługujące obiektom tej klasy posiada w stopniu największym (lub najmniejszym) z możliwych. Nie jest to precyzyjne określenie, ale może wystarczy podać przykłady tak rozumianych obiektów: punkt jest zdegenerowanym okręgiem (okręgiem o zerowym promieniu), zdegenerowany trójkąt to trójkąt o współliniowych bokach i zerowym polu, zdegenerowane wieloboki to digon i monogon, itp. Obiekty zdegenerowane w danej klasie zwykle należą zatem do klasy obiektów „prostszych" od rozważanych. To różni je więc od wyjątków oraz obiektów ekstremalnych.

*Kontrprzykłady*. Obiekty pozwalające na odróżnienie zakresów pojęć lub zakresów prawdziwości twierdzeń. Pojęcie kontrprzykładu nie wymaga chyba tutaj objaśnienia. Oczywiście nie wszystkie kontrprzykłady traktowane są jako patologie. Czasami znalezienie kontrprzykładu dla prawdziwości jakiejś hipotezy jest po prostu *niespodzianką*, nie wywołującą kolizji z uprzednio żywionymi przekonaniami.

*Patologie*. Obiekty „niechciane", pojawiające się nieoczekiwanie w rozważaniach matematycznych i powodujące kolizje z dotąd żywionymi intuicjami matematycznymi bądź obiekty konstruowane specjalnie, dla ukazania ograniczeń (pojęć, metod, intuicji).

*Prototypy (wzorce) oraz innowacje*. Można także myśleć o obiektach standardowych jako swoistych wzorcach lub prototypach, a o niektórych nowego rodzaju obiektach jako innowacjach (zob. np. Gaifman 2004). W tym sensie np. liczby całkowite są innowacją względem liczb naturalnych (a nie liczbami „niestandardowymi"). To odróżnienie związane jest z tzw. genetycznym sposobem wprowadzania nowych rodzajów liczb, w odróżnieniu od sposobu aksjomatycznego, na co zwracał uwagę już Hilbert w swojej aksjomatyce liczb rzeczywistych z 1900 roku.

Nie jest to oczywiście klasyfikacja obiektów matematycznych, nie było moim zamiarem podejmowanie się tak bezsensownego działania. Chciałem raczej zwrócić uwagę na sposób, w jaki zawodowi matematycy zwykli mawiać o badanych przez siebie obiektach (zob. też rozdział 1 w Pogonowski 2019 oraz rozdział 3 w Pogonowski 2020b).

## *Kilka opozycji*

W dalszym ciągu zajmę się już jedynie obiektami patologicznymi oraz procesem ich oswajania. Należy podkreślić, że nie każdy „dziwny” obiekt rozważany w matematyce zyskuje miano patologicznego. „Oswajanie” obiektów uznawanych początkowo za patologiczne może trwać dość długo lub też względnie krótko, zależnie od kontekstu historycznego. Z odczuciem patologiczności obiektu wiązać się mogą, jak się zdaje, niektóre opozycje występujące w matematyce, np.:

*Opozycja skończone-nieskończone*. Matematyka współczesna doskonale sobie radzi z operowaniem na obiektach infinitarnych: w teorii mnogości rozwinięto teorię liczb porządkowych i kardynalnych oraz zbiorów nieskończonych dowolnie dużej mocy, w analizie dysponujemy ścisłą reprezentacją wielkości nieskończenie małych, w topologii rozważa się obiekty nieskończenie złożone (obiekty fraktalne). Warto jednak pamiętać, że nie zawsze tak było – zmagano się z wieloma uważanymi kiedyś za paradoksalne własnościami nieskończoności (np.: aporie Zenona, uwagi Proklosa, Galileusza i Bolzana o równoliczności zbiorów nieskończonych z ich częściami właściwymi, krytyka posługiwania się wielkościami nieskończenie małymi w początkach rachunku różniczkowego i całkowego). Jeszcze Gauss wypowiadał się krytycznie na temat rozważania wielkości nieskończenie wielkich, natomiast u Eulera znajdujemy przykłady posługiwania się nimi. Może warto dodać, że Cantor, który wprowadził do matematyki całą skalę zbiorów nieskończenie dużych, ostro sprzeciwiał się traktowaniu wielkości nieskończenie małych jako dobrze określonych obiektów matematycznych, jednak jego argumentacja w tej sprawie nie była poprawna, na co zwracał uwagę już Ernst Zermelo w swoich komentarzach redakcyjnych w wydaniu dzieł zebranych Cantora, zob. w tej sprawie Cantor 1932, str. 439. Polski przekład argumentacji Zermela znaleźć można w Pogonowski 2020a, str. 64. Zermelo podkreśla, że wywód Cantora nie ma zastosowania w przypadku struktur niearchimedesowych. O historii badań takich struktur traktuje obszerna rozprawa Ehrlich 2006, która zaciekawić może filozofów także dlatego, że ukazuje okoliczności i przyczyny powstawania nieporozumień w interpretacji dziejów matematyki.

*Opozycja dyskretne-ciągłe*. Debata na temat struktury kontinuum rozpoczęła się już w starożytności i właściwie trwa do dziś. Porządkowe i kardynalne własności liczb naturalnych dotyczą obiektów o charakterze dyskretnym, natomiast wielkości ciągłe ujmowane były jako kontinua, jako obiekty podzielne w nieskończoność i składające się z tego samego typu dalej w nieskończoność podzielnych części. Owo „składanie się" rozumiane bywało też jako „scalanie". W dziejach matematyki poświadcza się całą gamę stanowisk, dotyczących tego z czego i w jaki sposób składają się kontinua. Rozpowszechnione dziś ujęcie reprezentowania jednowymiarowego kontinuum geometrycznego jakim jest linia prosta poprzez kontinuum arytmetyczne uporządkowanych w sposób zupełny liczb rzeczywistych (tworzących przy tym maksymalne ciało archimedesowe, a więc nie zawierające elementów nieskończenie małych i nieskończenie dużych) nawiązuje do propozycji Davida Hilberta oraz Richarda Dedekinda. Rozważa się też inne propozycje takiej reprezentacji – np. liczby hiperrzeczywiste (zawierające elementy nieskończenie małe oraz nieskończenie duże). Praktyka badawcza pokaże, które własności poszczególnych reprezentacji okażą się przydatne w dalszym rozwoju matematyki. Godne zauważenia jest to, że podręcznik Keisler 1976, odwołujący się do zaproponowanej przez Abrahama Robinsona analizy niestandardowej opartej na liczbach hiperrzeczywistych cieszy się sporym powodzeniem, o czym świadczą jego liczne dalsze wydania oraz wywołana przez to podejście dyskusja. Dodam jeszcze, że w topologii ogólnej podano mnóstwo przykładów kontinuów, których własności określane były jako patologiczne (zob. np. Steen i Seebach 1995). Były to przy tym patologie konstruowane celowo, w intencji precyzacji pojęć.

*Opozycja regularne-nieregularne*. Regularności (prawidłowości) obserwowane w przyrodzie są inspiracją dla formułowania praw. Ogólne określenie znaczenia pojęcia „regularny" jest trudne. Zwykle regularności w matematyce wyrażane są przez różnego rodzaju symetrie, niezmienniki przekształceń, a nawet ogólniej, przez zależności funkcyjne. Znane *dictum*, że matematyka jest nauką o wzorcach uważam za trafne. Owe wzorce mogą mieć charakter arytmetyczny lub algebraiczny (np. własności działań), geometryczny (np. symetrie), porządkowy (np. typy porządków), topologiczny (np. własności metryczne), itd. Nieregularności rozumiane są chyba jako odstępstwa od rozważanych wzorców. Obiekty patologiczne znajdujemy jednak zarówno w świecie obiektów regularnych, jak też wśród obiektów nieregularnych.

*Opozycja zdeterminowane-losowe*. Ta opozycja jest w pewnym sensie szczególnym przypadkiem opozycji regularne-nieregularne. Zdeterminowanie jest zwykle wyrażane poprzez stosowne zależności funkcyjne. Nieco trudniejsze pojęciowo wydają się być zjawiska (procesy) losowe. Trzeba bowiem w jakiś sposób wyrazić *brak* regularności, *brak* wzorca, *brak* zależności. Przy tym, ma to być precyzyjny sposób matematyczny. Tak więc, losowość opisujemy jednak w sposób (na wyższym poziomie, można rzec) zdeterminowany. Należy przy tym podkreślić, że chodzi tu o losowość w świecie matematyki, którą potem – ewentualnie – możemy rzutować na zjawiska przyrodnicze.

Większość kwalifikacji patologiczności odnosi się do drugich członów wymienionych opozycji. Natomiast ich pierwsze człony odpowiadają dobrze oswojonym standardom, być może wyróżnionym epistemologicznie. Jan Woleński pisze (Woleński 2005, 261):

> Wprawdzie nie wiemy, czy świat ma naturę ciągłą czy dyskretną, ale wygląda na to, że tak jesteśmy ukonstytuowani, iż program naszej podstawowej reprezentacji o rzeczywistości

jest jednak nieciągły, a więc w istotny sposób związany z operacjami na liczbach naturalnych, a dopiero potem na innych (wymiernych, rzeczywistych itd.).

### *Powody pojawiania się patologii*

W jaki sposób można sensownie wypowiadać się o powodach pojawiania się patologii matematycznych, pamiętając, iż chodzi tu o *sposób mówienia* o obiektach matematycznych? Czym innym jest przecież sytuacja, gdy takie obiekty pojawiają się w badaniach matematycznych nieoczekiwanie, w sposób niejako naturalny i są początkowo „niechciane", „nieprawomocne", itp., a czym innym jest intencjonalne „wywoływanie" patologii. Sądzę jednak, że można ogólnie wyróżnić następujące powody pojawiania się terminu „patologia":

*Konflikt z zastanymi intuicjami*. Krzywe Peana i Hilberta są funkcjami ciągłymi, których wykres wypełnia kwadrat jednostkowy. Nazywane bywają patologicznymi ze względu na to, że przyzwyczajeni byliśmy do uważania wykresu funkcji (jednej zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych) jako tworu jednowymiarowego, o zerowym polu. Funkcja Weierstrassa jest ciągła, ale nigdzie nieróżniczkowalna (czyli, intuicyjnie mówiąc, jej wykres jest w każdym punkcie „złamany") i także podawana jest jako przykład patologii, m.in. ze względu na to, że większość funkcji, które spotykamy w zastosowaniach analizy matematycznej jest o wiele bardziej „gładka", znów mówiąc dość intuicyjnie.

*Kolizja własności*. Własności różnego rodzaju przysługujące temu samemu obiektowi mogą spowodować, że odbierany jest on jako patologiczny. Zbiory mogą być „duże" w sensie topologicznym (gęste, czyli, intuicyjnie mówiąc, wypełniające „gęsto" całą przestrzeń), „duże" w sensie numerycznym (np. nieprzeliczalne, czyli nieskończone, ale nierównoliczne ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych), lecz „małe" w sensie teorii miary (zbiory miary zero). Z tego typu kolizją mamy do czynienia np. w przypadku zbioru trójkowego Cantora. Taka kolizja nie musi jednak oznaczać patologiczności – „dobrze oswojony” zbiór liczb wymiernych z odcinka [0,1] jest w nim gęsty (czyli „duży” w naturalnej topologii), lecz jest zbiorem miary zero Lebesgue’a, czyli „mały” w sensie teorii miary.

*Ogólność definicji*. Rozważanie „całkiem dowolnych”’ obiektów może skutkować tym, że wiele z nich znacząco odbiega od wyjściowych, „prototypowych” obiektów. Gdy dopuszczamy rozumienie funkcji jako dowolnego zbioru par uporządkowanych (spełniającego oczywiście stosowny warunek jednoznaczności), to pojawiają się „funkcje potwory”, jak np. wspomniane wyżej funkcje Weierstrassa, Peana i Hilberta.

*Przeniesienie własności z przypadku skończonego na nieskończony*. Dogmat, iż część nie może być większa od całości pojawia się już u Euklidesa. Za paradoksalne uważano długo to, iż pewne zbiory są równoliczne ze swoimi podzbiorami właściwymi. Definicja zbiorów nieskończonych podana przez Dedekinda (zbiór jest nieskończony dokładnie wtedy, gdy jest równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym) przysłużyła się oswojeniu tej własności, uważanej wcześniej za paradoksalną. Jednak nasze intuicje dotyczące np. skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych (np. euklidesowej przestrzeni trójwymiarowej) nie mogą być automatycznie przeniesione na przestrzenie wektorowe o nieskończonej liczbie wymiarów (choć obiekty takie znajdują istotne zastosowania w fizyce współczesnej).

*Brak konstruktywności*. Konstrukcje wykorzystujące aksjomat wyboru pozwalają na tworzenie obiektów o paradoksalnych (względem zastanych intuicji) własnościach – np. zbiorów Vitalego (przypomnę, że zbiorem Vitalego jest każdy zbiór reprezentantów wybranych z klas relacji równoważności, zachodzącej między dwiema liczbami rzeczywistymi wtedy, gdy bezwzględna wartość ich różnicy jest liczbą wymierną) lub paradoksalnego rozkładu kuli wynikającego z twierdzenia udowodnionego przez Banacha i Tarskiego.

*Przenoszenie własności obiektów standardowych (prototypowych) na „całkiem dowolne" obiekty*. Jak wiadomo, hipoteza kontinuum zachodzi, jeśli ograniczymy się do uniwersum zbiorów borelowskich (czyli zbiorów, które mogą zostać otrzymane przez przeliczalne sumy, przeliczalne iloczyny oraz branie dopełnień z rodziny wszystkich przedziałów otwartych), natomiast jest niezależna od aksjomatów teorii mnogości Zermela-Fraenkla, gdy odniesiemy ją do całkiem dowolnych zbiorów. A zatem można rzec, że wśród owych całkiem dowolnych zbiorów kryją się te, które są „odpowiedzialne" za niezależność tej hipotezy.

*Nierozstrzygalność*. Znamy obecnie już całkiem sporo zdań niezależnych od arytmetyki Peana pierwszego rzędu lub teorii mnogości Zermela-Fraenkla. Musimy chyba zawiesić orzeczenie patologiczności wobec takich obiektów, których istnienie jest niezależne od teorii mnogości, czyli ani nie można w tej teorii udowodnić, że takie obiekty istnieją, ani też odrzucić ich istnienia na gruncie tej teorii. Nie ma w tym miejscu potrzeby epatowania czytelnika przykładami (są dość skomplikowane), ale może wystarczy powiedzieć, że zainteresowanie takimi obiektami wiązało się m.in. z możliwościami jednoznacznej charakterystyki obiektów uważanych za stosunkowo dobrze „oswojone", jak np. prosta rzeczywista.

*Skomplikowanie logiczne*. Z formalnego punktu widzenia, zbiór definiowalny przez formułę z dowolną skończoną liczbą kwantyfikatorów jest dobrze określony. Powstaje jednak naturalne pytanie, na ile dostępne poznawczo są obiekty, w których definicji wykorzystuje się np. miliard kwantyfikatorów. Jeśli chodzi o arytmetykę Peana pierwszego rzędu, to – jak wiadomo z twierdzenia Tennenbauma – jedynym jej modelem rekurencyjnym (czyli takim, w którym operacje arytmetyczne są efektywnie obliczalne, intuicyjnie mówiąc) jest model standardowy (czyli złożony ze wszystkich „prawdziwych" liczb naturalnych i tylko z nich). W modelach niestandardowych (w których istnieją elementy nieskończenie duże, intuicyjnie mówiąc) istnieją też oczywiście operacje arytmetyczne, ale ich definicje muszą wykorzystywać kwantyfikację nieograniczoną, czyli wykraczającą poza efektywną obliczalność.

*Brak opisu językowego (notacja).* Jak wiadomo, jest różnica między *opisywaniem* a *definiowaniem* obiektów matematycznych. Dla niektórych liczb porządkowych możliwa jest rekurencyjna notacja, inne mogą być jedynie definiowane. Osobną sprawą jest to, jak traktować te elementy pełnego zbioru potęgowego dowolnego zbioru (nieskończonego, przeliczalnego), które nie są definiowalne (z parametrami) w języku teorii mnogości. Czy traktować je jako patologiczne, ponieważ nie mogą zostać zdefiniowane (za pomocą przeliczalnych środków językowych) czy też zawiesić taką kwalifikację, skoro ich opis jest niedostępny? Warto może dodać, że niektórzy matematycy (w szczególności intuicjoniści) są skłonni uważać mówienie np. o *całkiem dowolnym podzbiorze zbioru wszystkich liczb naturalnych* (lub o całkiem dowolnym ciągu takich liczb) za nieuprawnione.

*Myślenie hipotetyczne (myślenie typu: co-by-było-gdyby).* To jeden z podstawowych składników twórczości matematycznej. W interesującym nas aspekcie odpowiedzialny jest m.in. za znajdowanie kontrprzykładów, w szczególności wykorzystujących obiekty patologiczne. Sądzę, że *myślenie przekorne* także jest wyróżnikiem twórczości matematycznej. Andrzej Mostowski pisał, że jedną z możliwości formułowania aksjomatów istnienia dużych liczb kardynalnych w teorii mnogości jest posłużenie się zasadą istnienia zbiorów szczególnych (the principle of existence of peculiar sets): jeśli przy tworzeniu nowych zbiorów przy użyciu znanych operacji na nich stale napotykamy zbiory o pewnej własności P i nie ma oczywistych powodów, aby uznać, że wszystkie zbiory mają własność P, to proponujemy nowy aksjomat, mówiący, iż istnieją zbiory, które nie mają własności P (Mostowski 1967).

## *Oswajanie patologii*

Jak zapewne ewentualni czytelnicy domyślają się, „oswajanie” patologii matematycznych wyraża się w pozbawieniu rozważanych obiektów miana patologii, a więc w zmianie sposobu mówienia i myślenia o nich, który jednak jest czymś umotywowany. Głównym czynnikiem jest tu niewątpliwie użyteczność rozważanych obiektów w praktyce badawczej matematyki. Widać to wyraźnie w przypadku zadomowienia się liczb całkowitych oraz zespolonych we współczesnej matematyce (oraz w jej zastosowaniach w naukach empirycznych). Na ową użyteczność składają się także uzyskane poprzez rozważanie kontrprzykładów ustalenia dotyczące zakresu stosowalności pojęć i twierdzeń. Wreszcie, cenne są również modyfikacje żywionych wcześniej intuicji matematycznych, wywołane analizą patologii.

Terminu „oswajanie” używać możemy nie tylko w odniesieniu do obiektów patologicznych. Właściwie w przypadku każdej innowacji w matematyce polegającej na rozważaniu nowego typu obiektów termin ten również ma zastosowanie. Przypomnę w największym skrócie niektóre fakty związane z oswajaniem liczb zespolonych, dla podkreślenia, że ów proces oswajania trwać może wiele stuleci. Niecierpliwy czytelnik, niezainteresowany faktografią matematyczną, może opuścić cały następny akapit, natomiast czytelnik interesujący się zmaganiami matematyków w dążeniu do utworzenia spójnej wizji tej jednej z najważniejszych dziedzin matematyki może oczywiście sięgnąć do któregoś ze znakomitych opracowań historii matematyki, np. Kline 1972 lub Stillwell 2010.

Rozważania algebraiczne znane w świecie arabskim udostępnione zostały w Europie w XII wieku (Gerard z Cremony, Fibonacci). Nad rozwiązaniami szczególnych przypadków takich równań trzeciego stopnia pracowali: Scipione del Ferro, Antonio Maria Fiore, Niccoló Fontana (Tartaglia), Rafael Bombelli, Gerolamo Cardano. Ten ostatni opublikował ogólne rozwiązanie w *Ars Magna* w 1545 roku. Pojawiają się w nim liczby zespolone (np. w problemie podziału 10 na sumę dwóch liczb, których iloczyn jest równy 40). Kartezjusz wiązał liczby *urojone* (termin użyty przez niego) z niemożliwościami geometrycznymi. John Wallis podał fizyczną (geometryczną) interpretację liczb dodatnich i ujemnych na osi liczbowej z wyróżnionym punktem (zerowym) oraz próbował podać geometryczną reprezentację dla pierwiastka z minus jeden. Abraham de Moivre pisał w 1698 roku, że Newton znał w 1676 roku zależność znaną dziś jako twierdzenie de Moivre'a. Leonhard Euler wprowadził oznaczenie $i$ dla pierwiastka z minus jeden oraz podał wizualizację liczb zespolonych jako punktów o prostokątnych współrzędnych. Euler korzystał ze wzoru $x+iy=r(cos(\alpha)+isin(\alpha))$ oraz przedstawiał graficznie pierwiastki równania $z^n=1$ jako wierzchołki wielokąta foremnego. Euler zdefiniował ponadto zespoloną funkcję wykładniczą oraz udowodnił, że $e^{i\alpha} = cos(\alpha)+isin(\alpha)$. Caspar Wessel podał w 1797 roku interpretację liczb zespolonych. Została ona doceniona dopiero w 1897 roku, a z dzisiejszego punktu widzenia polegała na rachunku na wektorach. Jean-Robert Argand opublikował anonimowo w 1806 roku rozprawę, w której zamieścił geometryczną reprezentację liczb zespolonych. William Rowan Hamilton w rozprawie z 1831 roku podał algebraiczną charakterystykę liczb zespolonych jako par liczb rzeczywistych, dla których określone są działania arytmetyczne. Carl Friedrich Gauss prawdopodobnie dysponował geometryczną reprezentacją liczb zespolonych w 1796 roku, choć dopiero w 1831 roku opublikował ten wynik. Wprowadził termin *liczby zespolone* (zwracając przy tym uwagę na niefortunność dotychczas używanej, za Kartezjuszem, nazwy *liczby urojone*). Augustin-Louis Cauchy rozpoczął badania nad funkcjami zmiennej zespolonej w 1814 roku. W 1825 roku opublikował rozprawę, w której występują całki krzywoliniowe (Poisson pisał o podobnych sprawach już w 1820 roku).

O pełnym oswojeniu liczb zespolonych w matematyce możemy chyba mówić od momentu udowodnienia Podstawowego Twierdzenia Algebry (pierwszy taki dowód podał Gauss w 1799 roku) oraz podaniu ich geometrycznej reprezentacji. Liczby zespolone charakteryzują się swoistą maksymalnością – w ciele liczb zespolonych każdy wielomian stopnia dodatniego o współczynnikach z tego ciała ma rozwiązanie (to jest właśnie treść Podstawowego Twierdzenia Algebry). W podręcznikach spotykamy czasem stwierdzenie, że wiele wyników dotyczących liczb rzeczywistych oraz funkcji zmiennej rzeczywistej można lepiej rozumieć, jeśli rozważy się je w kontekście liczb zespolonych. Zasada Lefschetza głosi, że dowolne zdanie w języku pierwszego rzędu teorii ciał, które jest prawdziwe w dziedzinie liczb zespolonych, jest prawdziwe w każdym ciele algebraicznie domkniętym charakterystyki zero (intuicyjnie mówiąc, zasada ta głosi zatem, że liczby zespolone są „wzorcowym" przykładem struktury należącej do tej klasy).

Jeśli chodzi o zastosowania w naukach empirycznych (przede wszystkim w fizyce), to okazuje się, że w wielu przypadkach uzyskujemy lepszy opis rzeczywistości fizycznej, gdy używamy ciała liczb zespolonych, a nie ciała liczb rzeczywistych. Z kolei jeśli chodzi o powszechność znajomości systemów liczbowych, to liczby zespolone wciąż jeszcze uznawane są za co najmniej „dziwne". Przyczyną tego typu trudności może być powszechne przekonanie, że liczby wiążą się z porządkiem, który jest zgodny z działaniami arytmetycznymi (jak wiadomo, w ciele liczb zespolonych nie można wprowadzić takiego porządku). Liczby w popularnym odczuciu miałyby tworzyć struktury liniowe. Dla większości populacji przyzwyczajonej przez szkołę, że nie można pierwiastkować liczb ujemnych obiekt taki jak pierwiastek kwadratowy z minus jeden wciąż nie jest „oswojony".

Wspomnieć jednak należy, że również niektórzy matematycy (np. Francis Maseres i William Frend) aż do końca XVIII wieku wyrażali zastrzeżenia wobec uznawania liczb ujemnych oraz zespolonych za pełnoprawne obiekty matematyczne. Natomiast w wieku XIX np. Hermann Hankel pisał, że po podaniu geometrycznej interpretacji liczb zespolonych (dostarczającej zatem, intuicyjnie mówiąc, ich poglądowej „wizualizacji”) nie można już dalej twierdzić, że są one obiektami niemożliwymi. Akceptacja liczb „dwuwymiarowych” (zespolonych) skłaniała do rozważenia możliwości istnienia liczb $n$-wymiarowych, czego podjął się William Rowan Hamilton. Jak się jednak okazało, tylko dla niektórych wymiarów określić można działania arytmetyczne w taki sposób, aby miały one – intuicyjnie mówiąc – pożądane naturalne własności. Przełamana została jednak pewna psychologiczna, można rzec, bariera i dozwolone zostały „wielowymiarowe” uogólnienia pojęcia liczby (do najbardziej znanych należą czterowymiarowe kwaterniony). Należy podkreślić, że te uogólnienia zostały stosunkowo szybko „oswojone”, na co wpływ miała zmiana perspektywy badawczej w algebrze, polegająca na tym, że algebra przekształciła się z dyscypliny dotyczącej rozwiązywania równań w o wiele bardziej ogólniejszą dyscyplinę, badającą całkiem dowolne struktury.

Zauważmy, że rozszerzając system liczbowy w celu rozwiązania nowych problemów, staramy się zachować większość podstawowych praw. Zyskujemy przy tym możliwość wykonywania nowych operacji, ale w niektórych przypadkach także coś zwykle tracimy (np. pewne ogólne własności działań). W wieku XIX (oraz w początkach wieku XX) intensywnie dyskutowano problemy dotyczące zarówno aksjomatycznych ujęć systemów liczbowych, jak też własności algebraicznych tych systemów. George Peacock sformułował tzw. *zasadę permanencji* (*Principle of permanence*) już w 1830 roku, a powtórzył ją w rozwiniętej formie w *A Treatise on Algebra*:

> Whatever algebraic forms are equivalent when the symbols are general in form, but specific in value, will be equivalent likewise when the symbols are general in value as well as in form. (Peacock 1845, 59)

Zasada ta miałaby nadawać kierunek rozwojowi algebraicznych systemów liczbowych. Ma ona oczywiście walor heurystyczny i wyraża pewne ograniczenia, jeśli chodzi o tworzenie uogólnień pojęcia liczby, ale zaleca także, aby przy tych uogólnieniach zachowywać możliwie jak najwięcej własności uznawanych za naturalne. Również Hermann Hankel sformułował podobną zasadę (*das Princip der Permanenz der formalen Gesetze*):

> Wenn zwei in allgemeinen Zeichen der arithmetica universalis ausgedrückte Formen einander gleich sind, so sollen sie einander auch gleich bleiben, wenn die Zeichen aufhören, einfache Grössen zu bezeichnen, und daher auch die Operationen einen irgend welchen anderen Inhalt bekommen. (Hankel 1867, 11)

Hankel formułował swoją zasadę w nieco innej sytuacji niż ta, w której zasadę permanencji formułował Peacock, ponieważ znane były już kwaterniony Hamiltona, a sam Hankel jako jeden z pierwszych doceniał propozycje Hermanna Grassmanna dotyczące ogólnej teorii wielkości wielowymiarowych. Wspominam w tym miejscu o zasadzie permanencji form, ponieważ uważam, że stanowiła ona zarówno wskazówkę dotyczącą uogólnień pojęcia liczby, jak też swoistą przestrogę przed nazbyt spekulatywnymi uogólnieniami, które mogłyby być uważane za paradoksalne (patologiczne).

Jak pokazuje Michael Detlefsen w swoim artykule dotyczącym formalizmu w matematyce (Detlefsen 2005), warto zwrócić uwagę na swoiste współdziałanie zasady permanencji form oraz pewnych zaleceń Davida Hilberta, który wyrażał matematyczny optymizm poznawczy formułując np. w Hilbert 1901 *aksjomat rozwiązywalności*, głoszący, iż każdy problem w matematyce może zostać rozwiązany lub można wykazać, że rozwiązanie przy danych założeniach nie istnieje (w matematyce nie ma *ignorabimus*). Można uważać, że taka postawa, sprzyjająca odważnemu wykorzystaniu wyobraźni i fantazji w matematyce oraz ograniczona jedynie wymogiem zachowania niesprzeczności, jest siłą napędową w rozwoju matematyki. Pisze mianowicie Detlefsen:

> Together, the Axiom of Solvability and the Principle of Permanence guided the progressive extension of the number-concept. The Axiom of Solvability expressed the mathematician's goal to solve problems. The Principle of Permanence acted as a constraint upon the applicability of this axiom. It required that newly introduced numbers preserve the basic laws of arithmetic. More precisely, it required that the laws governing new numbers be *consistent with* the laws governing the old ones. (Detlefsen 2005, 279)

David Hilbert pisał też wielokrotnie o potrzebie (konieczności) rozważania w matematyce obiektów *idealnych* (zob. np. Hilbert 1926). Takimi elementami są m.in. punkty i proste w nieskończoności, liczby idealne Kummera, ideały Dedekinda, itd. Tak więc, patrząc wstecz np. na historię (genetycznych) uogólnień pojęcia liczby można stwierdzić, że na poszczególnych etapach dodajemy pewne elementy idealne, choć mogą one czasem stwarzać wrażenie paradoksalności. Logiczne aspekty procesu rozszerzania pojęć bada Meir Buzaglo, rozważając m.in. zmiany rozumienia pojęcia liczby oraz rozszerzanie znaczeń operacji arytmetycznych i nawiązując do roli zasady permanencji form w tych procesach:

> During the nineteenth century, when rigor gradually resumed a place of importance in mathematics, there was a systematic attempt to conceptualize the idea of expansions, as presented in Peacock's 'principle of permanence of equivalent forms.' This attempt transferred the issue from the products of the expansion to the *process* of expansion itself. Peacock claimed that the symbolic algebra obtained from the expansion of arithmetic is logically independent of arithmetic, yet suggested by it. How an expansion of a realm can be 'suggested' by the existing realm has not, however, been analyzed prop-

> erly. Apparently this lack is due to the fact that discussions in logic are generally centered on deduction, which involves closed realms, thus marginalizing the issue of the expansion of concepts. But the most cursory survey shows that there is an abundance of logical, mathematical, and philosophical material that is continually raising the idea of expansions as logical and philosophical issue which naturally invites a more comprehensive discussion. (Buzaglo 2002, 3)

Zasady heurystyczne były przez matematyków także wcześniej proponowane w sytuacjach, gdy spotykano się z paradoksalnością. Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange oraz inni matematycy XVIII wieku wykorzystywali w operacjach na szeregach nieskończonych założenie, że własności algebraiczne zachodzące dla konstrukcji skończonych (wielomianów, skończonych rozwinięć) zachodzą także w przypadku szerszej klasy obiektów, takich jak nieskończone szeregi lub rozwinięcia. Założenie to krytykował Augustin-Louis Cauchy. Gottfried Leibniz wykorzystywał heurystyczną zasadę, nazywaną *prawem ciągłości* (*Law of Continuity*) dla uzasadnienia prawomocności działań na wielkościach nieskończenie małych. Zasada ta głosiła, w przybliżeniu, że to co jest prawdą dla wielkości skończonych pozostaje także prawdą dla wielkości nieskończonych. Pierwowzór tej zasady znajdujemy już w rozważaniach Johannesa Keplera (obliczenie pola powierzchni koła przez jego reprezentację jako wieloboku o nieskończenie wielu bokach o nieskończenie małej długości). Współcześnie zasada ciągłości Leibniza znajduje wyraz w tzw. zasadzie transferu w kontekście liczb hiperrzeczywistych, a więc z zasady heurystycznej przekształca się w formalną zasadę o precyzyjnej treści matematycznej.

Dodam jeszcze zwięzłe uwagi na temat historii oswajania pojęcia wielkości nieskończenie małej, rozumianej ogólnie jako tak mała wielkość, iż nie ma możliwości jej zmierzenia. Reuben Hersh zwraca uwagę na następujący intrygujący fakt z dziejów matematyki (Hersh 1997, 289):

> The infinitesimal has a fascinating history. At least as far back as Archimedes, it's been used by mathematicians who were perfectly aware that it didn't make sense.

Niecierpliwy czytelnik może znowu pominąć cały następny akapit, będący rekapitulacją znanych faktów z dziejów refleksji nad nieskończenie małymi, a dodany tutaj po to, aby niejako potwierdzić powyższą diagnozę Hersha.

Archimedes korzystał z *niepodzielnych*, za pomocą których obliczał pola oraz objętości tworów geometrycznych. Matematyczne podstawy jego rachunków zasadzały się na metodzie *wyczerpywania*, pochodzącej od Eudoksosa. Niepodzielne były też wykorzystywane (w różnych postaciach) w pracach Mikołaja z Kuzy, Johannesa Keplera, Bonawentury Cavallieriego. John Wallis wprowadził symbol $1/\infty$ na oznaczenie wielkości nieskończenie małej. Isaac Newton oraz Gottfried Leibniz korzystali z pojęcia nieskończenie małej (u Newtona: fluksja, u Leibniza: nieskończenie mała zmiana). Leibniz posługiwał się zasadami heurystycznymi (zasada ciągłości), które pozwalały wykonywać operacje na wielkościach nieskończenie małych. W wieku XVIII matematycy (np. Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange) powszechnie stosowali pojęcie wielkości nieskończenie małej, w dalszym ciągu bez precyzyjnej matematycznej definicji. Augustin-Louis Cauchy definiował pojęcie ciągłości używając wielkości nieskończenie małych. W pracach Augustina-Louisa Cauchy'ego, Bernarda Bolzana, Georga Cantora, Richarda Dedekinda, Karla Weierstrassa w wieku XIX podstawy rachunku różniczkowego i całkowego formułowane były już wykorzystując pojęcie granicy, z użyciem liczb oraz zbiorów (bez odwoływania się do nieskończenie małych). Prowadzono jednak również badania systemów, w których nieskończenie małe występowały, np. w pracach Tullio Levi-Civity, Giuseppe Veronese, Paula Du Bois-Reymonda, Hansa Hahna, Otto Stolza i innych. W 1934 roku Thoralf Skolem skonstruował niestandardowy model arytmetyki, w którym występowały liczby nieskończenie duże. Abraham Robinson w 1961 roku stworzył podstawy analizy niestandardowej, w której pojęcie nieskończenie małej uzyskuje precyzyjną postać matematyczną. John Horton Conway skonstruował ciało liczb nadrzeczywistych, które jest ciałem zawierającym wszystkie ciała uporządkowane. Philipp Ehrlich udowodnił twierdzenia charakteryzujące z dokładnością do izomorfizmu m.in. ciało liczb nadrzeczywistych.

Jako jeden z wniosków wynikających z powyższego krótkiego przeglądu faktów uważam stwierdzenie, że skuteczność w zastosowaniach nieprecyzyjnego przez długi czas pojęcia wielkości nieskończenie małej skłaniała matematyków do ignorowania owej nieprecyzyjności i zadowolenia się teoretyczną owocnością omawianego pojęcia.

## *Dostęp poznawczy do obiektów matematycznych*

Dostęp poznawczy do obiektów świata fizycznego uzyskujemy na podstawie percepcji zmysłowej, wskazań przyrządów pomiarowych oraz ustaleń teoretycznych. W rozwiniętych naukach, np. w fizyce, badane obiekty w ostatecznym rozrachunku są obiektami matematycznymi. O tych obiektach coś *mówimy*, jakoś je sobie *wyobrażamy*, ich własności ustalamy przez *rozumowania*, itd.

Czy mamy jednakowy dostęp poznawczy do wszelkich obiektów matematycznych? Tak ogólnie postawione pytanie wymaga uszczegółowienia. Po pierwsze, może chodzić o to, jak przyswajamy sobie pojęcia matematyczne. Na takie pytanie próbują odpowiadać nauki kognitywne oraz teorie nauczania matematyki. Można też pytać, jak powszechna w danej populacji jest znajomość poszczególnych pojęć matematycznych oraz praktyczna biegłość w posługiwaniu się nimi. To interesować może antropologów i teoretyków kultury. Możemy jednak zapytać również o to, czy wewnątrz samej matematyki daje się określić jakieś miary dostępności obiektów matematycznych.

Sądzę, że w tym przypadku istotne byłoby wzięcie pod uwagę takich czynników jak m.in.:

*Efektywność opisu językowego lub zasady konstrukcyjnej*. Hierarchia złożoności pojęć matematycznych przyjmuje postać hierarchii arytmetycznej oraz analitycznej. Obiekt jest tym „trudniejszy" („trudniej dostępny"), im więcej kwantyfikatorów potrzebnych jest w jego definicji. Tak więc, np. pojęcie granicy ciągu wymaga użycia trzech kwantyfikatorów, natomiast pojęcie zdania prawdziwego w modelu standardowym arytmetyki Peana pierwszego rzędu nie może zostać zdefiniowane na żadnym piętrze hierarchii arytmetycznej (intuicyjnie mówiąc, poszczególne piętra tej hierarchii wyznaczone są przez skomplikowanie logiczne formuł, mierzone liczbą występujących w nich kwantyfikatorów). Języki poszczególnych systemów logicznych mają różną moc wyrażania. Dla przykładu, w języku logiki pierwszego rzędu nie można zdefiniować (przez skończony układ zdań) pojęcia zbioru nieskończonego ani pojęcia ciągłości. W infinitarnym języku, w którym dopuszcza się przeliczalne alternatywy i koniunkcje oraz skończone prefiksy kwantyfikatorowe można zdefiniować pojęcie zbioru nieskończonego, ale nie można zdefiniować np. pojęcia dobrego porządku (jest ono definiowalne np. w języku infinitarnym, który oprócz przeliczalnych koniunkcji i alternatyw dopuszcza również przeliczalne prefiksy kwantyfikatorowe). W analizie matematycznej rozważa się hierarchię Baire'a funkcji – np. funkcja Dirichleta (funkcja charakterystyczna zbioru liczb wymiernych w zbiorze liczb rzeczywistych) należy do drugiej klasy Baire'a, gdyż może zostać zdefiniowana jako granica granic funkcji ciągłych. W topologii oraz deskryptywnej teorii mnogości w powszechnym użyciu jest hierarchia zbiorów borelowskich, a także inne hierarchie oddające stopień skomplikowania definicji zbiorów.

*Kategoryczna charakterystyka*. Niektóre podstawowe struktury matematyczne mogą zostać scharakteryzowane w sposób jednoznaczny, z dokładnością do izomorfizmu (czyli, intuicyjnie mówiąc, względem budowy wewnętrznej) lub elementarnej równoważności (czyli, intuicyjnie mówiąc, względem tego, co można o tych strukturach prawdziwie powiedzieć w języku rozważanej teorii). Istnieje dokładnie jedna algebra Peana (struktura z elementem pierwszym, bez elementu ostatniego taka, że po każdym elemencie następuje dokładnie jeden inny element – taką strukturę tworzą wszystkie liczby naturalne), dokładnie jedno ciało uporządkowane w sposób zupełny (ciało liczb rzeczywistych), ciało liczb zespolonych może zostać scharakteryzowane jako jedyne ciało algebraicznie domknięte charakterystyki zero, którego stopień przestępności nad ciałem liczb wymiernych jest równy kontinuum. Tego typu wyniki umacniają nasze przekonanie, że mamy do czynienia z dobrym dostępem poznawczym do rozważanych obiektów.

*Wielość alternatywnych reprezentacji*. Obiekt matematyczny uważany być może za łatwo dostępny także wtedy, gdy dysponujemy jego wieloma reprezentacjami, ukazującymi wiele jego aspektów. Dobrym przykładem są tu liczby wymierne, które ujmowane są w ich aspekcie porządkowym, arytmetycznym, geometrycznym, itp.

*Użyteczność w zastosowaniach*. Chodzi tu przede wszystkim o zastosowania wewnątrz samej matematyki. Pewne obiekty matematyczne są wręcz niezbędne w różnych działach matematyki. Przede wszystkim są to znane uniwersa liczbowe, ale także np. liczby porządkowe definiowane w teorii mnogości i wykorzystywane w konstrukcjach bazujących na indukcji pozaskończonej.

Za ciekawe uważam rozważenie kwestii jak obiekty patologiczne mają się do kwestii stosowalności matematyki w naukach empirycznych. W pracach popularyzujących matematykę często pisze się o obiektach fraktalnych, które miałyby być wszechobecne w przyrodzie. Rozsądne jest chyba stwierdzenie, że obiekty przyrody mogą stanowić pewne (skończone) przybliżenia matematycznych obiektów fraktalnych, które wszak są obiektami granicznymi, a więc definiowanymi przez procedury infinitarne. W literaturze filozoficznej dyskutuje się różnorakie *supertasks*, czyli procesy, w których w skończonym czasie wykonuje się nieskończoną liczbę operacji (np. lampa Thomsona, kule Laraudogoitii, itp.). Znane są argumenty, iż procesy takie nie są zgodne z akceptowanymi teoriami fizycznymi – zob. np. Romero 2014. Z kwestią anonsowaną w pierwszym zdaniu tego akapitu powiązać można również problematykę, o której wielokrotnie pisał Michał Heller (np. Heller 2010), czyli refleksję nad matematycznością oraz matematyzowalnością świata.

Twórcza rola patologii w rozwoju matematyki widoczna jest zatem zarówno w przypadku patologii, które pojawiają się niespodziewanie w trakcie badań, jak też w przypadku, gdy matematycy sami celowo konstruują obiekty, które nazywają patologicznymi. W tym pierwszym przypadku „oswajanie" patologii trwa zwykle dłużej (co pokazuje np. historia liczb ujemnych i zespolonych, a także wielkości nieskończenie małych). Patologie tworzone z rozmysłem chyba szybciej skutkują w rozwoju odnośnych teorii matematycznych (co z kolei pokazują przykłady wielu konstrukcji w topologii ogólnej, teorii miary, teorii mnogości). Bardziej szczegółowe omówienie tej problematyki wymagałoby wykorzystania w większym stopniu „żargonu matematycznego", co raczej nie jest zalecane w tekstach kierowanych do czasopism filozoficznych.

## *Cytowana literatura*

Buzaglo, M. 2002. *The logic of concept expansion*. Cambridge University Press, Cambridge.

Byers, W. 2007. *How mathematicians think: using ambiguity, contradiction, and paradox to create mathematics*. Princeton University Press, Princeton, NJ.

Cantor, G. 1932. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläutenden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind nebst einem Lebenslauf Cantors von Adolf Fraenkel*. Ernst Zermelo [redakcja naukowa]. Springer, Berlin.

Detlefsen, M. 2005. Formalism. W: Stewart Shapiro (Ed.) *Philosophy of mathematics and logic*. Oxford University Press, Oxford, 236–317.

Duda, R. 2010. „Matematyczność przyrody" czy „przyrodniczość matematyki"? W: Michał Heller, Józef Życiński (Red.) *Matematyczność przyrody*. Wydawnictwo Petrus, Kraków, 43–50.

Ehrlich, P. 2006. The rise of non-Archimedean mathematics and the roots of a misconception I: The emergence of non-Archimedean systems of magnitudes. *Archive for the History of Exact Sciences* 60, 1–121.

Feferman, S. 2000. Mathematical intuition vs. mathematical monsters. *Synthese* 125 (3), 317–332.

Friedman, H. 1992. The incompleteness phenomena. *Proceedings of the AMS Centennial Symposium, August 8–12, 1988.* American Mathematical Society, 49–84.

Gaifman, H. 2004. Nonstandard models in a broader perspective. W: Ali Enayat, Roman Kossak, editors, *Nonstandard models in arithmetic and set theory*. AMS Special Session Nonstandard Models of Arithmetic and Set Theory, January 15–16, 2003, Baltimore, Maryland, *Contemporary Mathematics* 361, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1–22.

Gelbaum, B.R., Olmsted, J.M.H. 1990. *Theorems and counterexamples in mathematics*. Springer-Verlag, New York.

Gelbaum, B.R., Olmsted, J.M.H. 2003. *Counterexamples in analysis*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York.

Hahn, H. 1980. *Empiricism, logic, and mathematics. Philosophical papers*. (Edited by Brian McGuinness) D. Reidel Publishing Company, Dordrecht Boston London.

Hankel, H. 1867. *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Funktionen. I Teil: Theorie der complexen Zahlensysteme insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilton'-schen Quaternionen nebst ihrer geometrischen Darstellung*. Leopold Voss, Leipzig.

Heller, M. 2010. Co to znaczy, że przyroda jest matematyczna? W: Michał Heller, Józef Życiński (Red.) *Matematyczność przyrody*. Wydawnictwo Petrus, Kraków, 9–22.

Hersh, R. 1997. *What is mathematics really?* Oxford University Press, New York.

Hilbert, D. 1901. Mathematische Probleme. *Archiv der Mathematik und Physik*, seria 3 (1), 44– 63, 213–237.

Hilbert, D. 1926. Über das Unendliche. *Mathematische Annalen* 95, 161–190.

*Keisler, H. J. 1976. Elementary calculus: an approach using infinitesimals*. Prindle Weber & Schmidt, Boston.

Kharazishvili, A.B. 2006. *Strange functions in real analysis*. Chapman & Hall/ CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore.

Kline, M. 1972. Mathematical thought from ancient to modern times. Oxford University Press, New York Oxford.

Lakatos, I. 1976. *Proofs and refutations*. Cambridge University Press, Cambridge.

Mostowski, A. 1967. Recent results in set theory. W: Imre Lakatos (Ed.) *Problems in the philosophy of mathematics, Proceedings of the international colloquium in the philosophy of science, London 1965*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 82–108.

Murawski, R. 2002. *Współczesna filozofia matematyki*. PWN, Warszawa.

Peacock, G. 1845. *A treatise on algebra* (second edition, volume II). J.J. Deighton, Cambridge.

Pogonowski, J. 2019. *Extremal axioms. Logical, mathematical and cognitive aspects*. Wydawnictwo Nauk Społecznych i Humanistycznych UAM, Poznań.

Pogonowski, J. 2020a. *Myślenie matematyczne. Drobne eseje przedemerytalne*. Wydawnictwo Nauk Społecznych i Humanistycznych UAM, Poznań.

Pogonowski, J. 2020b. *Essays on mathematical reasoning. Cognitive aspects of mathematical research and education*. LIT Verlag, Zürich.

Poincaré, H. 1908. *Wartość nauki*. G. Centnerszwer i Ska, Warszawa; Księgarnia H. Altenberga, Lwów.
Romero, G.E. 2014. The collapse of supertasks. *Foundation of science*, 19 (2), 209– 216.
Steen, L.A., Seebach, J.A., Jr. 1995. *Counterexamples in topology*. Dover Publications, Inc., New York.
Stillwell, J. 2010. *Mathematics and its history*. Springer, New York Dordrecht Heidelberg London.
Wise, G.L., Hall, E.B. 1993. *Counterexamples in probability and real analysis*. Oxford University Press, New York.
Woleński, J. 2005. *Epistemologia. Poznanie, prawda, wiedza, realizm*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki i Kognitywistyki
Uniwersytet Adama Mickiewicza
pogon@amu.edu.pl