PRINCIPIA XVIII-XIX (1997)
PL-ISSN 0867-5392

Friedrich Waismann

Charakter aksjomatu redukowalności

Oryginał: „Die Natur des Reduzibilitätsaxioms", Monatshefte für Mathematik und Physik *35 (1928), ss. 143-146. Przekład angielski w: F. Waismann,* Philosophical Papers, *Vienna Circle Collection, Vol. 8, Dordrecht & Boston: Reidel 1977, ss. 143-146.*

W rekonstrukcji matematyki, jaką przedstawiono w *Principia Mathematica*[1] – podstawowym dziele szkoły logicznej – znaczącą rolę odgrywa tak zwany aksjomat redukowalności. Aksjomat ten głosi: dla dowolnej funkcji propozycjonalnej $\varphi\hat{x}$ istnieje zawsze predykatywna funkcja propozycjonalna $\psi!\,\hat{x}$ formalnie równoważna $\varphi\hat{x}$ [2]. Rola aksjomatu redukowalności polega na umożliwieniu przejścia od dowolnej funkcji do funkcji predykatywnej i usunęciu w ten sposób trudności wynikających z założeń tak zwanej rozgałęzionej teorii typów.[3] W ramach *Principia Mathematica* aksjomat ten jest niezbędny. Bez niego, lub jakiegoś równoważnego aksjomatu, teoria liczb rzeczywistych, jaką tam rozwinięto, załamałaby się – a razem z nią podstawy analizy. Z drugiej strony, Russell i Whitehead przyjmując ten aksjomat instynktownie czuli, że ma on odmienny od pozostałych aksjomatow logiki charakter, a także to, iż nie można mu przypisać tego samego stopnia pewności. Ponieważ rzeczywista natura aksjomatu pozostawała nieznana, autorzy za-

---

[1] B. Russell, A.N. Whitehead, *Principia Mathematica*, Cambridge UP, Vol. I 1910, Vol. II 1912, Vol. III 1913.

[2] Ibid., Vol. I, s. 59, 74.

[3] Ibid., Vol. I, s. 51. Por. też F.P. Ramsey, „The Foudations of Mathematics", *Proceedings of the London Mathematical Society* II, 23 (1925), s. 365, 258 nn.

dowolili się takim układem dzieła, by w każdym miejscu można było rozpoznać, które twierdzenia zależą od aksjomatu redukowalności, a które nie.

Twierdzenia logiki posiadają charakterystyczną własność, która odróżnia je od wszystkich innych: są tautologiami. Tautologia to twierdzenie, które jest prawdziwe jedynie na mocy swej budowy. Aby być bardziej precyzyjnym: tautologia jest funkcją prawdziwościową, która pozostaje prawdziwa przy każdym wartościowaniu.[4] Dlatego żadne twierdzenie logiki nie przedstawia stanu rzeczy. W celu przedstawienia stanu rzeczy możemy posługiwać się jedynie twierdzeniami, które mogą być fałszywe (kiedy wyrażony w twierdzeniu stan rzeczy nie zachodzi). Również to jest przyczyną, dla której twierdzenia logiki nie wymagają testu empirycznego. Albowiem empiryczne sprawdzanie twierdzenia polega na porównywaniu go z rzeczywistością (z istniejącym stanem rzeczy). Lecz tautologia nie wyraża ani istnienia, ani nieistnienia stanu rzeczy; nie może być zatem ani potwierdzona, ani odrzucona przez doświadczenie. Mówiąc za Leibnizem, tautologia musi być prawdziwa w dowolnym świecie, nie tylko w *naszym*. Jeśli twierdzenie jest prawdziwe jedynie w naszym świecie, oznacza to z pewnością, że nie jest ono tautologiczne, i że nie należy do logiki.

Wyczuwaną przez Russella i Whiteheada trudność możemy teraz wyrazić w następującym twierdzeniu: *aksjomat redukowalności* – w odrożnieniu od aksjomatów logiki – *nie jest tautologią*, a na wprowadzenie go do logiki nie ma żadnego uzasadnienia. Celem przedstawionej poniżej analizy jest wykazanie tego faktu.

Jeśli aksjomat redukowalności jest tautologią, to musi obowiązywać w dowolnym świecie, nie tylko w naszym. Zatem jeśli skonstruujemy świat, w którym aksjomat redukowalności nie obowiązuje, to pokażemy, że na pewno nie jest on tautologią. Wyobraźmy sobie świat posiadający następujące własności[5]:

(1) Znajduje się w nim nieskończenie wiele indywiduów.

---

[4] Por. L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, 4.46.

[5] Por. też Ramsey, op. cit., s. 381.

(2) Każde indywiduum posiada nieskończenie wiele predykatywnych własności.

(3) Żadne dwa indywidua nie posiadają dokładnie tych samych własności.

(4) Jeśli dane indywiduum posiada pewną własność predykatywną, to posiada ją także inne indywiduum. Inaczej mówiąc, nie istnieje własność predykatywna należąca wyłącznie do jednego indywiduum.

Jeśli „a" jest nazwą indywiduum, to klasę c indywiduów posiadających własności predykatywne, które posiada a, można zdefiniować w następujący sposób:

$$(\varphi) \, . \, \varphi ! \hat{x} \, . = . \, \varphi ! a \, .$$

Funkcja propozycjonalna, którą właśnie skonstruowaliśmy z pewnością nie jest predykatywna (albowiem odwołuje się do ogółu własności predykatywnych); nawijmy ją $\varphi_1 \hat{x}$. Zgodnie z aksjomatem redukowalności musi istnieć predykatywna funkcja propozycjonalna $\psi ! \hat{x}$ formalnie równoważna $\varphi_1 \hat{x}$:

$$\vdash : (\exists \, \psi) : \varphi_1 x \, . =_x . \, \psi ! \, x$$

Lecz predykatywna funkcja propozycjonalna tego rodzaju nie istnieje. Otóż zgodnie z warunkiem (3) żadne indywiduum nie posiada wszystkich i tylko takich własności predykatywnych, które posiada a; dlatego klasa c zawiera jedynie indywiduum a. Z drugiej strony, jeżeli a posiada własność predykatywną, to zgodnie z warunkiem 4. posiada ją także jakieś inne indywiduum. Wynika stąd, że nie istnieje funkcja predykatywna koekstensywna z $\varphi_1 \hat{x}$ – zatem aksjomat redukowalności zawiódł.

Jedyną rzeczą, jaką pozostaje teraz sprawdzić, jest niesprzeczność skonstruowanego przez nas świata, tj. czy cztery warunki są ze sobą zgodne. W tym celu umieśćmy przedmioty naszego świata w innym królestwie, którego niesprzeczność została wykazana gdzie indziej; teraz nasze cztery warunki nie będą mogły doprowadzić do sprzeczności.[6] Niech królestwo R, w którym umieszczamy przedmioty naszego świata, będzie dziedziną liczb wymiernych.

Niech każdemu z indywiduów odpowiada pewna liczba wymierna. Niech klasy liczb wymiernych odpowiadają predykatywnym własnościom indywiduów, zgodnie z taką oto regułą: liczbie wymiernej r odpowiadają wszystkie przedziały otwarte zawierające r i ograniczone przez liczby wymierne – o tyle, o ile owe przedziały znajdują sie w królestwie R – tj. przecięcia tych przedziałów z R. Warunek (1) stanowi: istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych; warunek (2): każda liczba wymierna r znajduje się w nieskończenie wielu przedziałach; warunek (3): żadne dwie liczby wymierne nie znajdują się wyłącznie w tych samych przedziałach; warunek (4): każdy przedział otwarty zawiera więcej niż jedną liczbę wymierną. To pokazuje, że nasze uprzednio podane warunki były wolne od sprzeczności.

W konkluzji należy podkreślić, że rozmyślnie ograniczyliśmy się do liczb wymiernych i klas konstruowalnych, aby uniknąć problemów związanych – odpowiednio – z kontinuum liczb rzeczywistych oraz pewnikiem wyboru, a więc problemów, które po części wynikają z charakteru aksjomatu redukowalności.

Przełożył Artur Koterski

Zdzisław Kowalski

Uwagi do artykułu Waismanna „Charakter aksjomatu redukowalności”

W ocenie argumentacji Waismanna istotną rolę odgrywa interpretacja przedstawionej przez niego funkcji zdaniowej $\varphi_1 x$. Autor twierdzi, że $\varphi_1 x$ „z pewnością nie jest predykatywna”, gdyż odwołuje się do ogółu własności predykwatywnych. Zdaje się to niedwuzna-

[6] Jestem zobowiązany p. R. Carnapowi za podsunięcie mi następującego dowodu.

cznie wskazywać, że Waismann odwołuje się milcząco do zasady błędnego koła.[7] Funkcje zdaniowe skonstruowane niezgodnie z tą zasadą nazywa się niepredykatywnymi. Pominięta w artykule Waismanna, z racji swej rzekomej oczywistości, argumentacja wykazująca, że $\varphi_1 x$ jest niepredykatywna, mogłaby zostać zrekonstruowana następująco:

(1) Funkcja $\varphi_1 x$ definiuje własność posiadania wszystkich własności predykatywnych posiadanych przez przedmiot a.

(2) Załóżmy, że $\varphi_1 x$ jest predykatywna. Musimy wówczas przyjąć, ze definiowana przez nią własność jest również predykatywna.[8]

(3) W $\varphi_1 x$ występuje kwantyfikacja po własnościach predykatywnych, mamy więc, że własność definiowana przez tę funkcję należy do zakresu, którego dotyczy kwantyfikacja. Zgodnie z określeniem predykatywności oznacza to, że $\varphi_1 x$ nie jest predykatywna.

Podstawowy problem, jaki tu powstaje, polega na tym, że własność definiowana przez funkcję $\varphi_1 x$ jest koekstensywna z własnością bycia identycznym z przedmiotem a, z własnością wyznaczoną przez formułę „$x = a$". Sam Waismann stwierdza to niemal bezpośrednio, mówiąc, że do określonej przez funkcję $\varphi_1 x$ klasy c należy jedynie przedmiot a. Jednocześnie zaś pomija milczeniem problem, czy funkcja „$x = a$" jest predykatywna. Oznacza to, że autor bez uzasadnienia rozstrzyga kwestię, od której zależy bezpośrednio jego główna teza: jeśli uznałoby się funkcję „$x = a$" (własność bycia

---

7 W nowoczesnej literaturze przedmiotu występuje wiele, bynajmniej nie równoważnych, sformułowań tej zasady, z których pierwsze pochodzi od Poincarégo. Por. K. Gödel, „Russells Mathematical Logic', w: P.A. Schilpp (ed.), *The Philosophy of Bertrand Russell*, Evanstone & Chicago 1944, ss. 123-153; oraz A.A. Fraenkel, *Foundations of Set Theory*, Amsterdam 1958, ss. 174-182.

8 Przyjęcie predykatywności stosuje się w pierwotnym sensie do metod tworzenia pojęć (*concept formation*), np. do metody polegającej na formułowaniu odpowiednich funkcji zdaniowych, nie zaś do własności mających odpowiadać tym pojęciom. Jednak wielu autorów, w tym również Waismann, mówi „jednym tchem" zarówno o predykatywności funkcji zdaniowych, jak i własności. Wydaje się, że punkt (2) pozostaje w zgodzie z takim właśnie sposobem traktowania predykatywności, jest więc uzasadniony jako środek przedstawiania stanowiska Waismanna.

identycznym z przedmiotem a) za predykatywną, należałoby odrzucić twierdzenie Waismanna, że nie istnieje predykatywna funkcja zdaniowa koekstensywna z $\varphi_1 x$.Przy takim rozstrzygnięciu należałoby odrzucić również postulat (4) głoszący, że jeśli jakieś indywiduum posiada pewną własność, to posiada ją także inne indywiduum; własność bycia identycznym z przedmiotem a posiada tylko a. Okazuje się więc, że przyjęcie argumentacji Waismanna zależy od tego, czy uznamy identyczność z a za własność predykatywną, czy też nie. Ponieważ w krótkim komentarzu nie można nawet powierzchownie przedstawić tego zagadnienia, ograniczam się jedynie do stwierdzenia, że wywodząca się od Leibniza definicja identyczności ma w sobie pewien rys niepredykatywności. Mówiąc w sposób nie całkiem formalny, $a = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda własność a jest też własnością b i odwrotnie, a przecież sama idetyczność tych przedmiotów należeć ma do ich własności, Jednak identyczność wprowadza się niekoniecznie przez zwykłą definicję; w logice pierwszego rzędu stosuje się aksjomat $x = x$ i regułę ekstensjonalności dla identyczności. Czy ten podstawowy sposób wprowadzania znaku identyczności jest predykatywny? Aby odpowiedzieć na to istotne w ocenie argumentacji Waismanna pytanie, należałoby odpowiednio sprecyzować pojęcie predykatywności, ponieważ istniejące w literaturze definicje, zwłaszcza określenie milcząco przyjmowane przez Waismanna, są pod tym względem wyraźnie niezadowalające.

Niezależnie od kwestii predykatywności funkcji zdaniowej $x = a$, argumentacja Waismanna może prowadzić do nieporozumienia. Autor dowodzi jednocześnie dwóch różnych, lecz utożsamianych przez siebie tez: tezy głoszącej, że aksjomat redukowalności nie jest tautologią logiczną, oraz tezy, że nie jest on prawdą konieczną (nie jest prawdziwy w każdym świecie możliwym). Historycznie rzecz biorąc, wynikało to prawdopodobnie stąd, że za czasów Waismanna rozróżnienie tautologii logicznych i innych prawd koniecznych nie było wyraźnie dostrzegane, zwłaszcza w środowisku neopozytywistycznym. Dowód z drugiej tych tez zawiera istotną lukę. Chodzi o wykazanie niesprzeczności postulatów 1-4, przebiegające według powszechnie znanej dziś zasady: jeśli wszystkie zdania tworzące jakiś zbiór stają się prawdziwe przy pewnej interpretacji, to ów zbiór jest niesprzeczny (każdy zdań mający model jest niesprzeczny). W zastosowaniu do zdań 1-4 oznacza to jednak tylko tyle, że jeśli traktujemy występujące w nich wyrażenie „własność predykatywna" jako niezinterpretowane (pozbawione znaczenia), to po nadaniu mu sensu, przy którym oznacza ono przedziały otwarte zbioru liczb wymiernych, wszystkie zdania 1-4 staną się prawdziwe. Nie wynika stąd bynajmniej, że jeśli termin „własność predykatywna" ma już znaczenie zastane, np. takie, o jakie chodzi w artykule Waismanna, to dla zdań 1-4 można znaleźć interpretację, przy której wszystkie one staną się prawdziwe. Konkluzywność argumentacji Waismanna na rzecz tezy określonej powyżej jako druga wymaga czegoś więcej, mianowicie wykazania, że postulaty 1-4 *wraz* z innymi aksjomatami, które nadawałyby terminowi „własność predykatywna" znaczenie zbliżone do występującego w artykule, są niesprzeczne. To jednak nie zostało wykazane, oczywiście ze względu na brak takiej charakterystyki aksjologicznej w literaturze przedmiotu.

Przedstawione uwagi krytyczne miały na celu jedynie pokazanie, że teza Waismanna, iż aksjomat redukowalności nie jest koniecznie prawdziwy, nie została przezeń udowodniona. Kwestia jej prawdziwości nie była w ogóle przeze mnie podniesiona.

Zdzisław Kowalski