PRINCIPIA XXX-XXXI (2001)
PL-ISSN 0867-5392

George Berkeley

O tym, co nieskończone

Tekst G. Berkeleya „O tym, co nieskończone" pochodzi prawdopodobnie z 1705 lub 1706 roku. Wskazuje na to fakt, iż w tym właśnie okresie Berkeleya zajmowały studia matematyczne i metafizyczne, głównie zaś problem nieskończonego podziału oraz nieskończoności czasu i przestrzeni. Jest to najwcześniejszy tekst Berkeleya dotyczący metafizyki, a zawarte w nim pomysły znalazły swoje rozwinięcie w Traktacie o zasadach poznania ludzkiego (§ 123-34, oraz Wstęp § 2).

Tekst „O tym, co nieskończone", odnaleziony w Library of Trinity College w Dublinie, ukazał się po raz pierwszy w 1900 r. w czasopiśmie Hermathena, *nr XXVI. Przekład według wydania: The Works of George Berkeley, (ed.) Alexander Campbell, Oxford: Clarendon Press 1901 t. III, ss. 409–412. Wszystkie przypisy pochodzą od tłumaczki.*

Chociaż w ostatnim stuleciu matematycy poczynili zadziwiające postępy oraz wprowadzili wiele godnych podziwu metod badań, nieznanych starożytnym, to jednak ich zasady nadal wzbudzają liczne kontrowersje i spory, aż po wielki skandal dotyczący jakże słynnej sprawy oczywistości geometrii. Ośmielam się jednak sądzić, iż owe spory i wątpliwości wynikające z użytku, jaki robi się z wielkości [*quantitys*] nieskończenie małych w wyżej wspomnianych metodach, mogłyby zostać łatwo zakończone tylko dzięki namysłowi nad pewnym fragmentem z niezrównanych *Rozważań dotyczących rozumu ludzkiego* pana Locka, księga I, rozdział 17, paragraf 7, w którym to autor, zajmując się tematem nieskończoności z sobie tylko właściwą rozwagą i jasnością, wygłasza te oto doniosłe słowa:

> Chociaż idea nieskończoności powstaje przez zastanawianie się nad wielkością i nad naszą zdolnością do bezgranicznego powiększania wielkości dzięki wielokrotnemu dodawaniu dowolnych jej części, to jednak wydaje mi się, że wywołujemy poważne zamieszanie w swych myślach, gdy łączymy nieskończoność z pew-

ną określoną ideą wielkości, jaką umysł mieć może, i rozprawiamy i snujemy myśli o wielkościach nieskończonych, takich jak nieskończona przestrzeń lub nieskończone trwanie. Jeśli bowiem (jak właśnie sądzę) nasza idea nieskończoności jest ideą rosnącą bez końca, gdy tymczasem każda idea wielkości, jaką mieć możemy, zawsze sama się ogranicza (bo choćby była dowolnie wielka, większa, niż jest, być nie może), to łączyć ideę nieskończoności z jakąkolwiek posiadaną przez nas ideą wielkości to tyleż, co stosować niezmienną miarę do wielkości rosnącej. Myślę tedy, że nie będzie to błaha subtelność, jeśli powiem, iż należy starannie odróżniać ideę nieskończoności przestrzeni od idei przestrzeni nieskończonej.[1]

Gdyby więc to, co pisze pan Locke, zastosowano *mutatis mutandis* do wielkości nieskończenie małych, bez wątpienia uwolniłoby to nas od niejasności i pomieszania, które są udziałem skądinąd doniosłych osiągnięć współczesnej analizy [matematycznej]. Albowiem temu, kto wraz z panem Lockiem słusznie przywiązywać będzie wagę do rozróżnienia między nieskończonością przestrzeni a przestrzenią nieskończenie wielką lub małą oraz temu, kto uważa, że posiadamy ideę tej pierwszej, ale w żadnym razie tej drugiej, trudno będzie porzucić te przekonania, by rozprawiać o częściach nieskończenie małych lub *partes infinitesimae* wartości skończonych, ani tym bardziej o *infinitesimae infinitesimarum* itd. Tak jednak powszechnie czynią ci, którzy piszą o rachunkach różniczkowych itp. Na papierze przedstawiają oni części nieskończenie małe kilku rzędów[2], tak jakby posiadali w umysłach idee odpowiadające tym słowom i znakom lub tak jakby nie zawierało sprzeczności twierdzenie, że istnieje odcinek nieskończenie mały, a ponadto jeszcze inny, nieskończenie mniejszy od niego. Wydaje mi się oczywiste, że nie powinniśmy używać znaków, którym nie odpowiada żadna idea. Równie oczywiste jest to, że nie mamy idei odcinka nieskończenie małego; co więcej, w sposób oczywisty nie mogłaby ona istnieć. Albowiem każdy dowolnie mały odcinek za-

[1] J. Locke, *Rozważania dotyczące rozumu ludzkiego*, przeł. B. J. Gawecki, Warszawa 1955, t. I, s. 285 n. (cytat zmodyfikowany).

[2] Por. również G. Berkeley, *Traktat o zasadach poznania ludzkiego,* przeł. J. Leszczyński, Warszawa 1956, s. 131, § 131: „Są pomiędzy nimi [tzn. geometrami czasów dzisiejszych] ludzie cieszący się wielką powagą, którzy, nie zadowalając się uznaniem podzielności skończonych linii na nieskończoną liczbę części, utrzymują nadto, że każda z tych nieskończenie małych sama z kolei jest podzielna na nieskończoność innych części, czyli nieskończenie małych drugiego rzędu i tak *ad infinitum*”.

wsze daje się podzielić na dwie mniejsze części. Dlatego też nie może istnieć coś takiego jak linia *quavis data minor* czy nieskończenie mała.

Ponadto wynika z tego jasno, że część nieskończenie mała nawet pierwszego rzędu jest po prostu niczym. Dr Wallis, wybitny matematyk, pisze o tym w 95 twierdzeniu swojej *Arithmetic of Infinites*, w którym tworzy przestrzeń asymptotyczną zawartą między hiperbolą i jej dwiema asymptotami, umieszczając na osi rzędnych *series reciproca primanorum* w ten sposób, że pierwszy element ciągu, tzn. asymptoty, powstaje w wyniku dzielenia 1 przez 0. Skoro zatem jednostka, tzn. jakikolwiek skończony odcinek podzielny przez 0, daje asymptotę hiperboli, tj. prostą nieskończenie długą, to z konieczności wynika stąd, że iloraz miary skończonej przez nieskończoną wynosi 0, tzn. że *pars infinitesima* miary skończonej jest dokładnie niczym. W istocie bowiem dzielenia leży to, że dzielna podzielona przez iloraz daje dzielnik. Otóż trudno przypuścić, aby ktoś mówiący o odcinkach nieskończenie małych nic przez nie nie rozumiał, a jeśli pojmuje rzeczywiste wartości skończone, to popada w poważne trudności.

Rzućmy okiem na dysputę między panem Nieuentiitem[3] a panem Leibnizem. Pan Nieuentiit uznaje części nieskończenie małe pierwszego rzędu za rzeczywiste wielkości, wyklucza natomiast *differentiae differentiarum* lub części nieskończenie małe kolejnych rzędów, czyniąc z nich po prostu wiele zer. To to samo, co powiedzieć, że kwadrat, sześcian lub inne potęgi rzeczywistej, dodatniej wartości są po prostu niczym; to zaś jest przecież oczywistą niedorzecznością.[4]

---

[3] Bernard Nieuentiit (1654–1718), duński fizyk, matematyk i teolog naturalny.

[4] Por. również G. Berkeley, *Traktat o zasadach poznania ludzkiego,* op. cit., s. 131, § 130: „Są znów inni, którzy utrzymują, że [wielkości] nieskończenie małe wszystkich rzędów poniżej pierwszego są zgoła niczym, uważając, nie bez słuszności, za niedorzeczność, iżby sobie wyobrażać, że istnieje jakaś dodatnia wielkość lub część rozciągłości, która, mimo że pomnażana w nieskończoność, nie mogłaby nigdy dorównać najmniejszej choćby danej rozciągłości. Z drugiej jednak strony niemniej niedorzeczne wydaje się przypuszczenie, żeby kwadrat, sześcian lub inna potęga dodatniego, rzeczywistego pierwiastka miała być niczym, a to przecież zmuszeni są utrzymywać ci, którzy przyjmują nieskończenie małe pierwszego rzędu, przecząc istnieniu wszystkich małych rzędów dalszych".

Ponadto pan Nieuentiit zakłada to jako oczywisty aksjomat, tzn. że między dwiema równymi wielkościami nie może być żadnej różnicy lub – co na jedno wychodzi – że różnica ta jest niczym. Pan Leibniz nie jest skłonny przeczyć tej jakże oczywistej prawdzie, przyznając, że równe są nie tylko te wielkości, między którymi nie ma żadnej różnicy, ale także te, między którymi różnica jest niemierzalnie mała. *Quemadmodum* – pisze on – *si lineae punctum alterius lineae addas quantitatem non auges.*[5] Jeśli jednak odcinki są podzielne w nieskończoność, to pytam, jak może istnieć coś takiego jak punkt? Lub też zakładając, że istnieją punkty, jak można sądzić, że tym samym jest dodanie niepodzielnego punktu i dodanie na przykład *differentia* na rzędnej paraboli? Ta ostatnia bynajmniej nie jest punktem, i to do tego stopnia, że da się podzielić na nieskończoną ilość rzeczywistych wielkości, z których każda może być dalej dzielona *in infinitum* itd., zgodnie z tym, co mówi pan Leibniz. W takie oto trudności popadli ci wielcy mężowie, stosując ideę nieskończoności do cząstek o wielkości niezmiernie małej, ale rzeczywistych i ciągle podzielnych.

Więcej o owym sporze dowiedzieć się można z *Acta Eruditorum* z lipca A. D. 1695, w których – jeśli wierzyć francuskiemu autorowi *Analyse des infiniment petits* – pan Leibniz przedstawia wystarczające dowody ustanowionych przez siebie zasad. Choć oczywiście nie troszczy się o to, że mogą być kwestionowane oraz zdaje się obawiać, że *nimia scrupulositate arti inveniendi obex ponatur*[6], tak jakby w matematyce możliwy był nadmiar skrupulatności lub jak gdyby zasady geometrii nie powinny być tak bezsporne, jak wnioski z nich wywiedzione.

Dr Cheyne[7] w czwartym rozdziale swoich *Philosophical Principles of Natural Religion* podaje następujący argument na rzecz wielkości nieskończenie małych:

> Cała abstrakcyjna geometria zależy od możliwości [istnienia] nieskończenie wielkich i małych wielkości, a prawdy odkryte za pomocą metod opartych na tych założeniach potwierdzone są metodami mającymi inne podstawy.

---

[5] Jeśli do linii dodać punkt należący do innej linii nie da to innej wartości.

[6] Zbyt wielka pedantyczność kładzie tamę inwencji twórczej.

[7] George Cheyne (ur. 1670), angielski fizyk, członek Royal Society, autor m.in. *English Malady*, w 1705 r. opublikował pracę na temat rachunku różniczkowego.

Na to zaś odpowiadam, że założenie wartości nieskończenie małych nie jest istotne dla postępów współczesnej analizy. Pan Leibniz przyznaje, że jego *calculus diferentialis* mógł zostać dowiedziony *per reductione ad absurdum* metodami starożytnych. Sir Isaak Newton zaś w swoim późnym traktacie, oznajmia nam, że jego rachunek różniczkowy może zostać wyprowadzony *a priori*, bez zakładania wielkości nieskończenie małych.

Nie mogę pominąć fragmentu z traktatu *De Spatio Reali seu Ente Infinito* pana Raphsona[8] (rozdział 3, strona 50), w którym to utrzymuje on, że cząstka nieskończenie mała jest *quasi extensa*. Nie mogę jednak pojąć, co miał na myśli pan Raphson, mówiąc o *pars continui quasi extensa*. Pozwolę sobie również zauważyć, że wielu słynnych pisarzy współczesnych nie waha się rozprawiać o sferze o nieskończonym promieniu, ani o trójkącie równobocznym o nieskończonym boku, które to pojęcia, gdy rzetelnie je zbadać, mogą się okazać raczej niespójne.

Uważam więc, że wszystkie spory dotyczące tego, co nieskończone, ustałyby, rozważania zaś dotyczące wielkości nieskończenie małych nie kłopotałyby już więcej matematyków, gdyby tylko włączyli metafizykę w ich matematykę i raczyli nauczyć się od pana Locke'a, jaka jest różnica między *nieskończonością* a *tym, co nieskończone*.

Przełożyła Ewa Kobyłecka

---

[8] Ralph Raphson, autor m.in. *Demonstratio de Deo* (1710).