

MARIAN MIKOŁAJEK\*

## NIELINIOWE ZAGADNIENIE DEFORMACJI DWUSKŁADNIKOWEGO OŚRODKA POROWATEGO O INDUKOWANEJ ANIZOTROPII PRZEPIYU

### NON-LINEAR PROBLEM OF DEFORMATION OF TWO PHASE POROUS MEDIA WITH INDUCED ANISOTROPIC PERMEABILITY

#### Streszczenie

W artykule podano sformułowanie problemu nieliniowego stanu deformacji dwuskładnikowego nasyconego ośrodka porowatego ze zmienną porowatością i przepuszczalnością oraz zmiennymi indukowanymi anizotropowymi własnościami przepuszczalności. Zmienne anizotropowe własności przepuszczalności opisuje się poprzez zmianę struktury wewnętrznej porów kulistych na pory elipsoidalne. Przykład obliczeniowy obejmuje wyznaczenie aktualnego tensora przepuszczalności dla zadanej deformacji w płaskim stanie odkształcenia.

*Słowa kluczowe: ośrodek porowaty, duże deformacje, generowana anizotropia przepływu*

#### Abstract

The paper deals with the non-linear state of deformation of saturated two phase porous media with variable porosity and permeability. Induced anisotropic permeability is taken into account. This induced anisotropy is described by changing the internal structure of spherical pores into ellipsoidal ones. Numerical example shows the evaluation of the current tensor of permeability in the plane state of deformation.

*Keywords: porous media, large deformations, induced anisotropic permeability*

\* Dr inż. Marian Mikołajek, Instytut Mechaniki Budowli, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska.

## Oznaczenia

$d$	– średnica ziaren szkieletu
$\mathbf{E}$	– tensor odkształcenia szkieletu
$\mathbf{e}$	– wektory bazy
$\mathbf{F}^s$	– gradient deformacji szkieletu
$J^F$	– Jacobian deformacji cieczy
$J^s$	– Jacobian deformacji szkieletu
$\mathbf{K}$	– tensor przepuszczalności
$k$	– współczynnik przepuszczalności
$n$	– porowatość
$N, A, Q, R$	– stałe materiałowe
$n_0$	– porowatość początkowa
$\mathbf{R}^s$	– tensor obrotu szkieletu
$\mathbf{S}$	– II tensor naprężenia Piola-Kirchhoffa
$\mathbf{u}^s$	– wektor przemieszczenia szkieletu
$\mathbf{U}^s$	– tensor rozciągnięcia szkieletu
$X^s, X^F$	– współrzędne materialne cząstek szkieletu i cieczy
$x^s, x^F$	– współrzędne przestrzenne cząstek szkieletu i cieczy
$\mathbf{a}$	– macierz transformacji
$\theta$	– wskaźnik zawartości cieczy
$\Lambda_i$	– wydłużenia główne szkieletu
$\sigma$	– naprężenie w cieczy
$\tau$	– siła interakcji
$\mathbf{v}^F$	– wektor prędkości cieczy
$\mathbf{v}^s$	– wektor prędkości szkieletu

## 1. Wstęp

Praca obejmuje teoretyczne sformułowanie problemu nieliniowego stanu deformacji dwuskładnikowego ośrodka porowatego ze zmienną porowatością i zmiennymi anizotropowymi własnościami przepuszczalności sprężystego szkieletu wraz z separacją faz cząstek szkieletu i cieczy. Nieliniowe efekty w ośrodku porowatym były rozważane przez wielu autorów (Szefer [5, 6], Schrefler [1], Wilmański [7], Mikołajek [2–4]).

Szereg problemów geotechnicznych (jak osiadanie podłoża budowlanego, problem upłynnienia gruntu tzw. *liquefaction*), transport zanieczyszczeń w ośrodku gruntowym (ważny z punktu widzenia ochrony środowiska), jak również opis deformacji nowych materiałów poryzowanych (np. termoizolacyjnych) wymaga dalszych prac badawczych z tego zakresu.

Zmienne w czasie procesu deformacji anizotropowe własności przepuszczalności uwzględnia się poprzez opisanie zmiany struktury wewnętrznej porów kulistych na pory elipsoidalne (ośrodek o początkowych izotropowych własnościach przepuszczalności) lub zmiany porów elipsoidalnych na inne elipsoidalne (ośrodek o wstępnych anizotropowych własnościach przepuszczalności). Modelując opisany proces deformacji, postuluje się, że początkowe kuliste lub elipsoidalne pory w trakcie procesu deformacji przechodzą w pory

elipsoidalne o osiach równoległych do osi głównych tensora rozciągnięcia szkieletu, natomiast obrót tych osi określa tensor obrotu dla szkieletu.

Podobnie w przypadku płaskiego stanu deformacji dwuskładnikowego ośrodka porowatego mamy do czynienia z przejściem od przekroju kołowego porów do przekroju eliptycznego (kierunki osi elipsy pokrywają się z kierunkami głównymi tensora rozciągnięcia szkieletu), a następnie z obrotem, który odpowiada tensorowi obrotu szkieletu. W przykładzie obliczeniowym dla zadanego gradientu deformacji szkieletu w pewnym punkcie ośrodka porowatego i dla danej chwili czasu, wyznaczono aktualny tensor przepuszczalności.

Na zakończenie podaje się komplet równań opisujący statyczną deformację konsolidującego ośrodka porowatego ze sprężystym szkieletem i nieściśliwą cieczą Pascala.

## 2. Opis przyjętego modelu dwuskładnikowego ośrodka porowatego

Nawodniony ośrodek porowaty traktujemy jako ośrodek dwufazowy zgodnie z pracą [5].

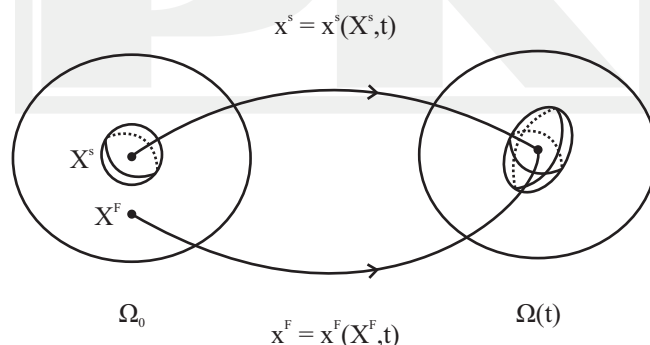
Udział porów w opisie ośrodka uwzględniamy poprzez skalarną funkcję  $n(x)$ . Wewnętrzna struktura porów oraz jej zmianę uwzględnia się w opisie własności przepuszczalności ośrodka.

Przyjmując, że ciecz jest nieściśliwą cieczą Pascala aktualną porowatość można wyznaczyć z równania ciągłości cieczy [2, 5].

$$n(X) = \frac{n_0(X)}{J^F(X)}$$

Do opisu własności przepuszczalności postulujemy, że początkowe kuliste lub elipsoidalne pory (wstępnie izotropowy lub anizotropowy ośrodek przepuszczalny) w trakcie procesu deformacji przechodzą w pory elipsoidalne o osiach równoległych do osi głównych tensora rozciągnięcia  $U^s$  szkieletu.

Aktualne położenie pora po obrocie określa tensor obrotu  $\mathbf{R}^s$  dla szkieletu.



Rys. 1. Graficzny obraz deformacji nasyconego ośrodka porowatego

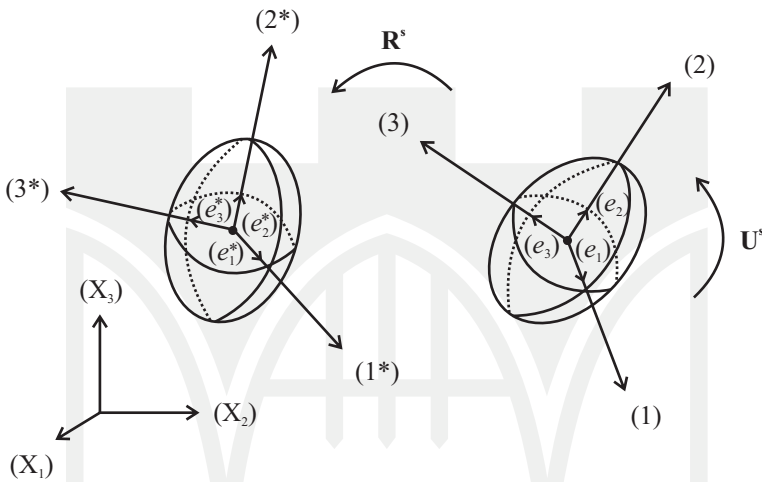
Fig. 1. Plot illustrating the deformation of a saturated porous media

Oznaczamy wydłużenia główne szkieletu w danym punkcie ośrodka przez  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ . Odpowiadające im kierunki główne tensora rozciągnięcia szkieletu to:  $e_1, e_2, e_3$ . Po obrocie opisanym tensorem obrotu  $R^s$  otrzymujemy:

$$e_1^* = R^s \cdot e_1^T$$

$$e_2^* = R^s \cdot e_2^T$$

$$e_3^* = R^s \cdot e_3^T$$



Rys. 2. Rozciągnięcie i obrót porów w trakcie deformacji

Fig. 2. Extension and rotation of pores during deformation

Tensor przepuszczalności w układzie osi własnych ( $1^*, 2^*, 3^*$ ) przyjmuje postać:

$$[K_{ij}^*] = \begin{bmatrix} k \cdot \frac{3\Lambda_2 \cdot \Lambda_3}{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 \cdot \Lambda_1 \cdot \Lambda_3 + \Lambda_2 \cdot \Lambda_3} & 0 & 0 \\ 0 & k \cdot \frac{3\Lambda_1 \cdot \Lambda_3}{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 \cdot \Lambda_1 \cdot \Lambda_3 + \Lambda_2 \cdot \Lambda_3} & 0 \\ 0 & 0 & k \cdot \frac{3\Lambda_1 \cdot \Lambda_2}{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 \cdot \Lambda_1 \cdot \Lambda_3 + \Lambda_2 \cdot \Lambda_3} \end{bmatrix}$$

Gdzie współczynnik przepuszczalności  $k(x) = k[n(x)]$

$$\text{np. } k = \frac{2,8 \cdot 10^{-2} \cdot d_q \cdot n^3}{(1-n)^4} - \text{wzór Krügera}$$

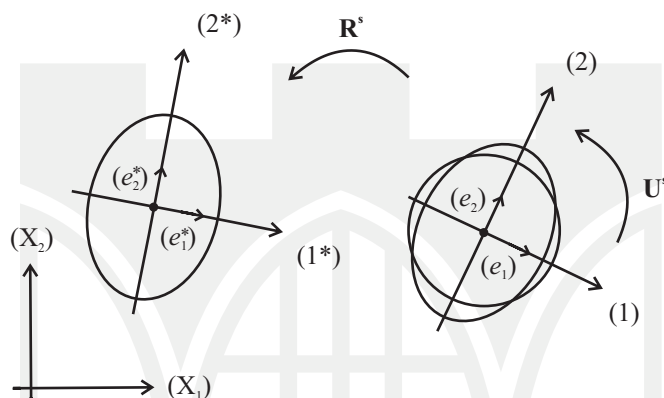
Po transformacji do układu  $(X_1, X_2, X_3)$  otrzymujemy:

$$K = a^T \cdot K^* \cdot a$$

gdzie:

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{11}^* & \mathbf{e}_{12}^* & \mathbf{e}_{13}^* \\ \mathbf{e}_{21}^* & \mathbf{e}_{22}^* & \mathbf{e}_{23}^* \\ \mathbf{e}_{31}^* & \mathbf{e}_{32}^* & \mathbf{e}_{33}^* \end{bmatrix}$$

Podobnie w przypadku płaskiego stanu deformacji dwuskładnikowego ośrodka porowatego mamy do czynienia z przejściem od przekroju kołowego porów do przekroju eliptycznego (kierunki osi elipsy pokrywają się z kierunkami głównymi tensora rozciągnięcia szkieletu), a następnie z obrotem, co odpowiada tensorowi obrotu szkieletu  $\mathbf{R}^s$ .



Rys. 3. Rozciągnięcie i obrót porów w płaskim stanie deformacji

Fig. 3. Extension and rotation of pores in the plane state of deformation

$$\mathbf{K}^* = [\mathbf{K}_{ij}^*] = k \cdot \begin{bmatrix} k \cdot \frac{2\Lambda_2}{\Lambda_1 + \Lambda_2} & 0 \\ 0 & k \cdot \frac{2\Lambda_1}{\Lambda_1 + \Lambda_2} \end{bmatrix}$$

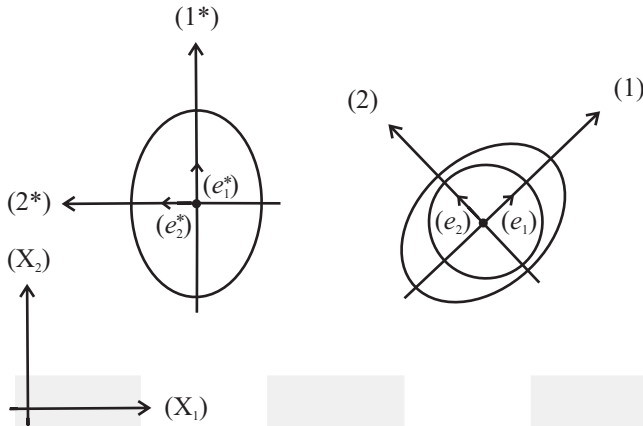
Po transformacji:  $\mathbf{K} = \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \mathbf{K}^* \cdot \boldsymbol{\alpha}$

gdzie:  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{11}^* & \mathbf{e}_{12}^* \\ \mathbf{e}_{21}^* & \mathbf{e}_{22}^* \end{bmatrix}$

### 3. Przykład

Stan deformacji w pewnym punkcie ośrodka porowatego opisany jest gradientem deformacji  $\mathbf{F}^s$ . Poniżej wyznaczono aktualny tensor przepuszczalności odpowiadający zadanej deformacji. Aktualną wartość współczynnika przepuszczalności  $k$  wyznacza się, wykorzystując podany wcześniej wzór Krügera.

$$\mathbf{F}^s = \begin{bmatrix} 1, & -1 \\ 3, & 3 \end{bmatrix}$$



Rys. 4. Przykładowy przekrój porów dla założonej deformacji

Fig. 4. Exemplary cross-section for assumed deformation

Tensor rozciągnięcia szkieletu w układzie osi własnych (1, 2)  $\mathbf{U}^s$  oraz w układzie  $(X_1, X_2)$   $\mathbf{U}^s$  przyjmuje postać:

$$\mathbf{U}^s = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}^s = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Tensor obrotu w układzie  $(X_1, X_2)$  wyraża się następująco:

$$\mathbf{R}^s = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Zatem:  $\mathbf{F}^s = \mathbf{R}^s \cdot \mathbf{U}^s$

Wektory bazy układu (1, 2) oraz  $(1^*, 2^*)$  w układzie  $(X_1, X_2)$  to:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) & \mathbf{e}_1^* &= \mathbf{R}^s \cdot \mathbf{e}_1^T = (0, 1) \\ \mathbf{e}_2 &= \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) & \mathbf{e}_2^* &= \mathbf{R}^s \cdot \mathbf{e}_2^T = (-1, 0) \end{aligned}$$

Zatem macierz przejścia pomiędzy układami  $(X_1, X_2)$  a  $(1^*, 2^*)$  jest następująca:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+3\sqrt{2}}k, & 0 \\ 0, & \frac{2 \cdot 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+3\sqrt{2}}k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}k, & 0 \\ 0, & \frac{3}{2}k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \mathbf{K}^* \cdot \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}k, & 0 \\ 0, & \frac{1}{2}k \end{bmatrix}$$

gdzie:

$\mathbf{K}^*$  – tensor przepuszczalności w układzie (1\*, 2\*)

$\mathbf{K}$  – tensor przepuszczalności w układzie ( $X_1, X_2$ )

#### 4. Zbiórny układ równań dla nieliniowej teorii konsolidacji przyjętego ośrodka porowatego

Komplet równań opisujący statyczną deformację konsolidującego ośrodka ze sprężystym szkieletem i nieściśliwą cieczą Pascala sformułowano bazując na [3, 4].

– równania ciągłości masy:

$$\rho_0^s = \frac{1-n}{1-n_0} \rho^s \cdot J^s$$

$$n_0 = n \cdot J^s$$

– równania bilansu pędu:

$$\{(1-n_0) \cdot S_{KL} \cdot x_{i,L}^s + n \cdot J^F \cdot \sigma[X_{K,i}^F]_{,K} = 0 \quad \text{gdzie: } [x_{K,i}^F] = (\text{cofx}_{K,i}^F)^T$$

$$n \cdot \{J^F \cdot \sigma \cdot [X_{K,i}^F]_{,K} - \tau_i = 0$$

– równania geometryczne

$$E_{KL}^s = \frac{1}{2} (u_{K,L}^s + u_{L,K}^s + u_{r,K}^s \cdot u_{r,L}^s)$$

$$\Theta = n \cdot (J^s - J^F)$$

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \mathbf{K}^* \cdot \boldsymbol{\alpha}$$

gdzie:

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} k \cdot \frac{3\Lambda_2 \cdot \Lambda_3}{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 + \Lambda_1 \cdot \Lambda_3 + \Lambda_2 \cdot \Lambda_3} & 0 & 0 \\ 0 & k \cdot \frac{3\Lambda_1 \cdot \Lambda_3}{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 + \Lambda_1 \cdot \Lambda_3 + \Lambda_2 \cdot \Lambda_3} & 0 \\ 0 & 0 & k \cdot \frac{3\Lambda_1 \cdot \Lambda_2}{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 + \Lambda_1 \cdot \Lambda_3 + \Lambda_2 \cdot \Lambda_3} \end{bmatrix}$$

– równania konstytutywne

$$S_{KL} = \frac{1-n}{1-n_0} \cdot [2N \cdot E_{KL} + (A \cdot E_{ii} - Q \cdot \Theta) \cdot \delta_{KL}]$$

$$\sigma = Q \cdot E_{KK} + R \cdot \Theta$$

$$\tau_i = K_{ij}^{-1} \cdot (v_j^F(X^F) - v_j^s(X^S))$$

$$k = \frac{2,8 \cdot 10^{-2} \cdot d_q \cdot n^3}{(1-n)^4} \text{ – wzór Krügera}$$

## 5. Wnioski

Zaproponowany model ewolucji zmian porowatości i przepuszczalności jest skutecznym sposobem opisu zmiennych anizotropowych własności przepuszczalności sprężystego szkieletu. Zmiana struktury wewnętrznej porów została wyznaczona z wykorzystaniem łatwo interpretowalnych pełnych miar deformacji jak tensor rozciągnięcia i obrotu oraz główne wydłużenia szkieletu w danym punkcie ośrodka. Przy braku wypełnienia porów cieczą ośrodek dwuskładnikowy jest jednofazowym ośrodkiem porowatym. Powyższy model może być wówczas wykorzystany do opisu zmian, ewolucji porowatości takiego ośrodka. Może to stanowić istotny wkład do opisu zmian termoprzepuszczalności ciał porowatych.

## Literatura

- [1] Lewis R., Schrefler R., *The finite element method in the deformation and consolidation of porous media*, J. Wiley, New York 1987.
- [2] Mikołajek M., *Finite deformation of consolidating porous layer with phase separation*, ZAMM. Z. Angew. Math. Mech. 68., 1988.
- [3] Mikołajek M., *Duże deformacje ośrodka porowatego*, Prace Komisji Mechaniki Stosowanej PAN, Mech. 14., 1990.
- [4] Mikołajek M., Szefer G., *Consolidation of a porous multilayered subsoil undergoing large deformation*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics 3, 1998.
- [5] Szefer G., *Nonlinear problems of consolidation theory*, Prob. Nonlin. De Mechanique, PWN, Warszawa 1980.
- [6] Szefer G., *Computational aspects of saturated porous media undergoing large deformations*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics 3, 1998.
- [7] Wilmański K., *Porous media at finite strains. The new model with the balance equation for porosity*, Arch. Mech., 48, 4, Warszawa 1996.